



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y
ELÉCTRICA**

**SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E
INVESTIGACIÓN**

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

**CÁLCULO DE PARÁMETROS MEDIANTE EL MÉTODO DEL
ELEMENTO FINITO PARA EL ANÁLISIS DE TRANSITORIOS
ELECTROMAGNÉTICOS EN CABLES DE ALTA TENSIÓN**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**P R E S E N T A
GUILLERMO IVÁN CRUZ PELÁEZ**



MÉXICO D.F., FEBRERO 2015



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México D. F. siendo las 15:00 horas del día 15 del mes de Diciembre del 2014 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E.S.I.M.E. – ZAC. para examinar la tesis titulada:

CÁLCULO DE PARÁMETROS MEDIANTE EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO
PARA EL ANÁLISIS DE TRANSITORIOS ELECTROMAGNÉTICOS EN CABLES DE ALTA TENSIÓN

Presentada por el alumno:

CRUZ PELÁEZ GUILLERMO IVÁN
Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)
Con registro:

B	1	2	0	7	3	2
---	---	---	---	---	---	---

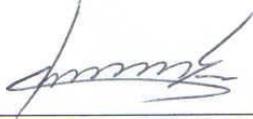
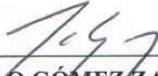
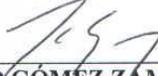
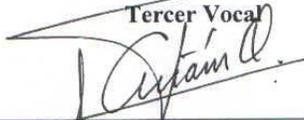
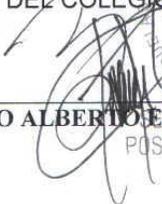
aspirante de:

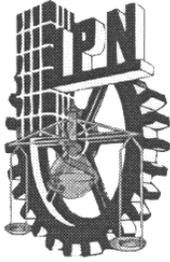
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

 _____ DR. FERMÍN PASCUAL ESPINO CORTÉS Presidente	 _____ DR. PABLO GÓMEZ ZAMORANO Segundo Vocal
 _____ DR. DAVID SEBASTIÁN BALTAZAR Tercer Vocal	 _____ DR. PABLO GÓMEZ ZAMORANO Secretario
 _____ M. EN C. TOMÁS IGNACIO ASIAÍN OLIVARES	 _____ DR. RAÚL PEÑA RIVERO
PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES	
 _____ DR. MAURO ALBERTO ENCISO AGUILAR	



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D. F., el día 26 del mes de Enero del año 2015. El que suscribe Guillermo Iván Cruz Peláez alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica con número de registro B120732, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME-Zacatenco del IPN, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Fermín Pascual Espino Cortés y el Dr. Pablo Gómez Zamorano y cede los derechos del trabajo titulado: Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso del autor y/o directores del trabajo. Éste puede ser obtenido escribiendo a las direcciones de correo electrónico: ivanlp11@gmail.com, fpepino@gmail.com y/o pablo.gomez.78@gmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Guillermo Iván Cruz Peláez

Agradecimientos

Antes que todo, primero agradezco al creador por la sabiduría que me ha conferido al permitirme terminar mis estudios de Posgrado, al igual que por todas las pruebas, bendiciones y satisfacciones que ha puesto a lo largo de mi vida.

A mis padres queridos Amelia Peláez de la Rosa y Cuauhtémoc Cruz Silva por ser un pilar importante en mi crecimiento profesional pero sobre todo por enseñarme los valores que me han nutrido como persona.

A mis hermanos Jazmín Anahí Cruz Peláez y Jhony Josué Cruz Peláez por confiar en mí, por sus sugerencias y alentarme en vivir esta aventura y por los lindos momentos de nuestra infancia y adolescencia.

Mi más sincera admiración para mis directores de tesis: Dr. Fermín Pascual Espino Cortés y Dr. Pablo Gómez Zamorano, por el apoyo incondicional, consejos, conocimiento y sobre todo por la amistad que mostraron no solo para conmigo sino para el grupo de altas tensiones.

A familiares, amigos y compañeros de tiempo atrás y de años recientes, gracias por ser cómplices de las convivencias y experiencias, en especial mi cariño al grupo de altas tensiones siempre me sentí como en casa.

No podría olvidar desde luego a mi alma mater el Instituto Politécnico Nacional, al CONACyT por el apoyo económico otorgado durante mis estudios, al programa BEIFI, así como a los proyectos de investigación 20140498 y 20140390 por el apoyo económico y por tan grande e inolvidable experiencia que me han dado fuera de las fronteras de mi país.

Por último, agradezco a todos aquellos que por ahora omito y que me han brindado su amistad, una disculpa por no mencionarlos pero es injusto dejar fuera a alguno de ustedes, así que mi agradecimiento es para todos.

“Un amigo fiel es un refugio seguro: el que lo encuentra ha encontrado un tesoro”.

Eclesiástico 6:14

Gracias a la vida porque a través de los años he pasado por infinidad de momentos buenos y no tantos pero en todos ellos he salido avante.

"No lo digo porque tenga escasez, pues he aprendido a contentarme cualquiera que sea mi situación. Sé vivir humildemente, y sé tener abundancia; en todo y por todo estoy enseñado, así para estar saciado como para tener hambre, así para tener abundancia como para padecer necesidad".

Filipenses 4:11-12

Resumen

Históricamente, las líneas de transmisión aéreas han sido el principal medio para el transporte de energía eléctrica desde las centrales generadoras hasta los centros de consumo. Sin embargo, la instalación de sistemas de cables subterráneos ha experimentado un continuo crecimiento, dada la confiabilidad que estos sistemas representan al reducir el número de interrupciones en el suministro de energía.

Al igual que las líneas de transmisión, una vez en operación los cables subterráneos se ven sometidos a distintos tipos de perturbaciones, entre las cuales se tiene a los transitorios electromagnéticos. Un análisis adecuado de los transitorios electromagnéticos requiere de modelos capaces de reproducir los efectos de la dependencia frecuencial de los parámetros eléctricos.

De acuerdo con lo anterior, en esta tesis se desarrolla un modelo de dos puertos de línea de transmisión multiconductora en el dominio de la frecuencia para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables subterráneos. Este modelo emplea la técnica de descomposición modal para desacoplar el sistema de n conductores y la transformada numérica de Laplace inversa (TNLI) para obtener la respuesta transitoria en el dominio del tiempo, esto es, las formas de onda de tensión y/o corriente en los extremos emisor y receptor del cable (este modelo se implementa empleando el lenguaje de programación de MatLab®). Las respuestas transitorias obtenidas con el modelo implementado se comparan con resultados obtenidos mediante el software de simulación de transitorios electromagnéticos PSCAD-EMTDC®.

El cálculo correcto de parámetros eléctricos es fundamental en simulaciones transitorias, ya que permite predecir la magnitud y duración de las sobretensiones. Este cálculo se realiza comúnmente a través de aproximaciones analíticas, tales como las desarrolladas por Wedepohl/Wilcox y Schelkunoff para obtener las impedancias en los conductores tubulares de cables coaxiales monopolares, así como las aproximaciones de Pollaczek para el cálculo de la impedancia de retorno por tierra. Sin embargo, estas formulaciones tienen algunas limitaciones debidas a la forma en que se aproximan los efectos producidos por las corrientes de retorno por tierra, así como la omisión de los efectos de proximidad de conductores para un intervalo completo de frecuencias.

En este contexto, técnicas numéricas como el Método del Elemento Finito (MEF) son una alternativa viable para el cálculo de dichos parámetros, ya que permiten tomar en cuenta de mejor manera los efectos mencionados en el párrafo anterior. Por lo tanto, en el alcance de este trabajo se incluye el cálculo de los parámetros eléctricos de impedancia serie y admitancia en derivación utilizando el Método del Elemento Finito (MEF) a través del software comercial COMSOL Multiphysics 4.4®.

Se comprueba que el MEF, combinado con el método de la impedancia compleja y el método de la energía, es un enfoque confiable para la determinación de los parámetros de impedancia serie. Esta metodología se compara con el procedimiento de cálculo de los parámetros empleando las aproximaciones analíticas para un intervalo de

frecuencias de 60 Hz a 1 MHz, donde se verifica que las aproximaciones analíticas son una buena aproximación a frecuencias iguales o mayores a 1 kHz.

El uso del MEF permitió validar el cálculo de los parámetros eléctricos de cables subterráneos monopolares del tipo coaxial. Con ello se pretende que en un futuro esta metodología pueda ser empleada a geometrías y arreglos más complejos, como es el caso de cables con neutro concéntrico, cables con forma sector circular, barras, arreglos de cables monofásicos en configuración plana y/o trébol, etc.

Abstract

Historically, overhead transmission lines have been the main option for transporting electric energy from power plants to consumption centers. However, in the last decades the use of underground power systems has increased due to the reliability that these systems represent in reducing the number of energy interruptions.

Similarly to overhead transmission lines, underground power cables are submitted to different disturbances once in operation, such as electromagnetic transients. A suitable transient analysis involves the use of models capable of reproducing the effects produced by the frequency dependence of electrical parameters.

Therefore, a frequency domain two-port multiconductor transmission line model with frequency dependent electrical parameters for electromagnetic transient analysis was developed in this thesis. This model is based on modal decomposition to uncouple the system and the application of the Numerical Inverse Laplace Transform (NILT) for the transformation from frequency to time domain. This algorithm is programmed using MatLab® language. The transient response at the sending and receiving ends is subsequently compared with the results obtained by means of simulations performed using the commercial program PSCAD-EMTDC®.

Accurate computation of electric parameters is fundamental in transient simulations, since it allows predicting the magnitude and duration of overvoltages. In the past, these calculations were achieved by means of analytical approximations, such as those developed by Wedepohl/Wilcox and Schelkunoff to calculate tubular conductors impedances for coaxial single core cables, while Pollaczek's approximations are the basis of earth return current calculations. However, these formulae have some limitations related to the way they take into account the effects produced by the earth current return, as well as the omission of proximity effects between conductors for a wide frequency range.

In this context, numerical techniques such as the Finite Element Method (FEM) have emerged as a new option for the calculation of these parameters, since they allow taking into account the drawbacks mentioned above. Therefore, the scope of this work includes the calculation of series impedance and shunt admittance using the Finite Element Method (FEM) through the commercial software COMSOL Multiphysics 4.4®.

It is verified that the FEM combined with the complex impedance method and the energy method, is a reliable approach for series impedance calculations. This methodology is compared with the parameter calculation procedure using analytical approximations for a frequency range of 60 Hz to 1 MHz, and it is verified that the analytical approximations are a good approximation for frequencies equal or above to 1 kHz.

The Finite Element Method is used to validate electrical parameters calculation of underground single core cables. It is intended that, in the future, this procedure can be applied to more complicated geometries and arrangements, such as concentric neutral wires, sector-shaped cables, bus bars, flat and trefoil underground cables systems.

Índice

AGRADECIMIENTOS	IV
RESUMEN	V
ABSTRACT	VII
ÍNDICE	IX
LISTA DE FIGURAS	XI
LISTA DE TABLAS	XIV
NOMENCLATURA	XV
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.	1
1.1 INTRODUCCIÓN.....	1
1.2 OBJETIVOS.....	3
1.3 ANTECEDENTES.....	3
1.4 ESTADO DEL ARTE.....	6
1.5 JUSTIFICACIÓN.....	9
1.6 LIMITACIONES Y ALCANCES.....	9
1.6.1 <i>Limitaciones.</i>	9
1.6.2 <i>Alcances.</i>	10
1.7 ESTRUCTURA DE LA TESIS.....	10
CAPÍTULO 2. MODELADO DE CABLES SUBTERRÁNEOS.	13
2.1 INTRODUCCIÓN.....	13
2.2 SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN MULTICONDUCTORA.....	14
2.3 RED DE DOS PUERTOS.....	16
2.4 MODELADO DEL CABLE SUBTERRÁNEO.....	18
2.5 ECUACIONES DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO PARA OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS ELÉCTRICOS DE CABLES COAXIALES.....	20
2.5.1 <i>Cálculo de la impedancia con el enfoque del Método del Elemento Finito.</i>	21
2.5.1.1 <i>Método de la impedancia compleja.</i>	22
2.5.1.2 <i>Método de la energía.</i>	23
2.5.2 <i>Cálculo de la admitancia con el Método del Elemento Finito.</i>	24
2.5.2.1 <i>Método de la carga.</i>	25
2.5.2.2 <i>Método de la energía.</i>	25
CAPÍTULO 3. CÁLCULO DE PARÁMETROS ELÉCTRICOS DE CABLES SUBTERRÁNEOS UTILIZANDO EL MEF.	27
3.1 INTRODUCCIÓN.....	27
3.2 CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS ELÉCTRICOS DEPENDIENTES DE LA FRECUENCIA: RESISTENCIA $R\Omega$ E INDUCTANCIA $L\Omega$, USANDO EL PROGRAMA COMSOL MULTIPHYSICS 4.4®.....	28
3.2.1 <i>Modelo del cable.</i>	28
3.2.2 <i>Resultados.</i>	36
3.3 CÁLCULO DE LA CAPACITANCIA C , USANDO EL PROGRAMA COMSOL MULTIPHYSICS 4.4®.....	42
3.3.1 <i>Modelo del cable.</i>	42
3.3.2 <i>Resultados.</i>	44

CAPÍTULO 4. CÁLCULO DE SOBRETENSIONES TRANSITORIAS MEDIANTE EL MODELO IMPLEMENTADO Y COMPARACIONES CON PSCAD/EMTDC®.	47
4.1	INTRODUCCIÓN..... 47
4.2	METODOLOGÍA PARA LA VALIDACIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DEL MODELO DE DOS PUERTOS..... 48
4.3	RESULTADOS DE LA COMPARACIÓN DE LA RESPUESTA TRANSITORIA DE TENSIÓN. 50
4.3.1	<i>Caso A: Respuesta transitoria de tensión en un cable de potencia.</i> 51
4.3.2	<i>Caso B: Respuesta transitoria de tensión en un cable de potencia con armadura.</i> 53
4.3.3	<i>Caso C: Respuesta transitoria de tensión en un sistema trifásico de cables de potencia en posición horizontal.</i> 55
4.4	METODOLOGÍA PARA EL CÁLCULO DE LOS ESPECTROS DE FRECUENCIA EN UN CABLE COAXIAL..... 60
4.5	RESULTADOS DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA EN TENSIÓN Y FASE..... 62
4.5.1	<i>Espectro de frecuencia de tensión en la impedancia propia del núcleo (Z_{N_N}).</i> 62
4.5.2	<i>Espectro de frecuencia de fase en la impedancia propia del núcleo (Z_{N_N}).</i> 63
4.5.3	<i>Espectro de frecuencia de tensión en la impedancia mutua del núcleo y blindaje (Z_{N_B}).</i> 64
4.5.4	<i>Espectro de frecuencia de fase en la impedancia mutua del núcleo y blindaje (Z_{N_B}).</i> 66
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS.	69
5.1	CONCLUSIONES..... 69
5.2	APORTACIONES. 71
5.3	RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS. 72
REFERENCIAS.	75
APÉNDICE A. APROXIMACIONES ANALÍTICAS PARA EL CÁLCULO DE PARÁMETROS ELÉCTRICOS DE CABLES.	83
A.1	CABLE COAXIAL (XLPE)..... 83
A.2	CÁLCULO DE PARÁMETROS DE UN CABLE COAXIAL (XLPE). 84
A.2.1	<i>Matriz de impedancia serie.</i> 85
A.2.2	<i>Matriz de admitancia en derivación.</i> 89
A.3	ATERORIZAMIENTO DE LAS PANTALLAS METÁLICAS DE CABLES. 89
APÉNDICE B. TRANSFORMADA NUMÉRICA DE LAPLACE.	91
B.1	INTRODUCCIÓN..... 91
B.2	DEFINICIÓN..... 91
B.3	TRANSFORMADA NUMÉRICA DE LAPLACE INVERSA..... 92
B.4	TRANSFORMADA DIRECTA. 93
B.5	ERRORES EN LA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE LAPLACE INVERSA..... 93
APÉNDICE C. MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO.	95
C.1	INTRODUCCIÓN..... 95
C.1.1	<i>Discretización de la región de solución en un número finito de elementos.</i> 95
C.1.2	<i>Deducción de las ecuaciones que rigen a un elemento.</i> 96
C.1.3	<i>Ensamblaje de todos los elementos en la región de solución.</i> 99
C.1.4	<i>Resolución del sistema de ecuaciones obtenido.</i> 102
APÉNDICE D. PUBLICACIONES.	105

Lista de figuras

Fig. 2.1.	Condiciones de frontera para una línea multiconductora.	17
Fig. 2.2.	Representación gráfica del modelo de dos puertos (forma nodal).	17
Fig. 2.3.	Sección transversal de un cable coaxial.	18
Fig. 2.4.	Representación gráfica para determinar la impedancia en un cable coaxial.	19
Fig. 3.1.	Sección transversal del cable con sus dimensiones.	29
Fig. 3.2.	Mallado en el cable coaxial.	31
Fig. 3.3.	Mallado general en los dominios en la simulación.	31
Fig. 3.4.	Efecto piel en conductor del núcleo de Cu.	
a)	Densidad de flujo magnético a 60 Hz.	35
b)	Densidad de flujo magnético a 1 MHz.	35
Fig. 3.5.	Distribución de la densidad de corriente el suelo alrededor del cable	
a)	60 Hz.	36
b)	10 kHz.	36
Fig. 3.6.	Distribución de la densidad de corriente el suelo en la región de solución	
a)	60 Hz.	36
b)	10 kHz.	36
Fig. 3.7.	Densidad de flujo magnético (frontera de conductor perfecto), corriente circulando solo en:	
a)	Malla 1.	40
b)	Malla 2.	40
Fig. 3.8.	Densidad de flujo magnético (frontera de continuidad), corriente circulando solo en:	
a)	Malla 1.	41
b)	Malla 2.	41
Fig. 3.9.	Mallado del cable.	43
Fig. 3.10.	Distribución de potencial en el cable.	
a)	Terminal 1.	44
b)	Terminal 2.	44
Fig. 3.11.	Sección transversal de un cable coaxial con capas semiconductoras.	45
Fig. 4.1.	Diagrama de excitación con una fuente tipo escalón unitario (en el dominio de la frecuencia y tiempo) a un cable subterráneo.	48

Fig. 4.2.	Diagrama de flujo para la obtención de sobretensiones transitorias en el cable subterráneo.	50
Fig. 4.3.	Arreglo en PSCAD® y sección transversal cable de potencia.	51
Fig. 4.4.	Respuesta transitoria de tensión en el extremo emisor del cable excitando el núcleo, con extremo receptor en vacío y sin aterrizamiento de pantalla en sus extremos (sin y con pantalla semiconductor-PS).	51
Fig. 4.5.	Respuesta transitoria de tensión en el extremo receptor del cable excitando el núcleo, con extremo receptor en vacío y sin aterrizamiento de pantalla en sus extremos (sin y con pantalla semiconductor-PS).	52
Fig. 4.6.	Respuesta transitoria de tensión en ambos extremos del cable excitando el núcleo, con extremo receptor en vacío y con aterrizamiento de pantalla en el extremo emisor.	52
Fig. 4.7.	Respuesta transitoria de tensión en ambos extremos del cable excitando el núcleo, con extremo receptor en vacío y aterrizamiento de pantalla en ambos de sus extremos.	53
Fig. 4.8.	Arreglo en PSCAD® y sección transversal cable de potencia con armadura.	53
Fig. 4.9.	Respuesta transitoria de tensión en el extremo emisor del cable excitando el núcleo, con extremo receptor en vacío y sin aterrizamiento de pantalla en el extremo emisor (sin y con pantalla semiconductor-PS).	54
Fig. 4.10.	Respuesta transitoria de tensión en el extremo receptor del cable excitando el núcleo, con extremo receptor en vacío y con aterrizamiento de pantalla en el extremo emisor (sin y con pantalla semiconductor-PS).	54
Fig. 4.11.	Arreglo en PSCAD® y sección transversal del sistema trifásico de cables de potencia en posición horizontal.	55
Fig. 4.12.	Respuesta transitoria de tensión en el núcleo y blindaje de las fases A, B y C, en el extremo receptor del cable excitando núcleo de la fase A, con el extremo receptor en vacío.	
	a) sin aterrizamiento de pantalla en sus extremos.	56
	b) con pantalla aterrizada en el extremo emisor.	56
Fig. 4.13.	Respuesta transitoria de tensión en el núcleo de la fase A en el extremo receptor del cable excitando núcleo de la fase A, con el extremo receptor en vacío.	
	a) sin aterrizamiento de pantalla en sus extremos.	57
	b) con pantalla aterrizada en el extremo emisor.	57
Fig. 4.14.	Respuesta transitoria de tensión en el núcleo de las fases B y C en el extremo receptor del cable excitando núcleo de la fase A, con el extremo receptor en vacío.	
	a) sin aterrizamiento de pantalla en sus extremos.	58
	b) con pantalla aterrizada en el extremo emisor.	58

Fig. 4.15.	Respuesta transitoria de tensión en la pantalla de las fases A, B y C en el extremo receptor del cable excitando el núcleo de la fase A, con el extremo receptor en vacío.	
a)	sin aterrizamiento de pantalla en sus extremos.	59
b)	con pantalla aterrizada en el extremo emisor.	59
Fig. 4.16.	Diagrama de flujo para obtención de los espectros de frecuencia en el cable subterráneo.	61
Fig. 4.17.	Espectro de frecuencia en la magnitud de la tensión en la impedancia propia del núcleo $Z_{N,N}$ en ambos extremos del cable, sin y tomando en cuenta el efecto de proximidad de conductores, a una profundidad de:	
a)	0.7620 m.	62
b)	10 m.	62
c)	40 m.	63
Fig. 4.18.	Espectro de frecuencia de fase en la impedancia propia del núcleo $Z_{N,N}$ en ambos extremos del cable, sin y tomando en cuenta el efecto de proximidad de conductores, a una profundidad de:	
a)	0.7620 m.	63
b)	10 m.	64
c)	40 m.	64
Fig. 4.19.	Espectro de frecuencia en la magnitud de la tensión en la impedancia mutua del núcleo y blindaje $Z_{N,B}$ en ambos extremos del cable, sin y tomando en cuenta el efecto de proximidad de conductores, a una profundidad de:	
a)	0.7620 m.	65
b)	10 m.	65
c)	40 m.	65
Fig. 4.20.	Espectro de frecuencia de fase en la impedancia mutua entre núcleo y blindaje $Z_{N,B}$ en ambos extremos del cable, sin y tomando en cuenta el efecto de proximidad de conductores, a una profundidad de:	
a)	0.7620 m.	66
b)	10 m.	66
c)	40 m.	67
Fig. A.1.	Cable XLPE 15 kV, 100% pantalla de cinta de cobre (diseño estándar).	83
Fig. A.2.	Sección transversal de un cable coaxial.	85
Fig. C.1.	Elemento típico triangular, la numeración local de los nodos 1-2-3 en sentido inverso al giro de las manecillas del reloj.	96
Fig. C.2.	Funciones de forma α_1 , α_2 y α_3 para elementos triangulares.	98
Fig. C.3.	Ensamble de tres elementos; i j k correspondientes a la numeración local (1-2-3) del elemento mostrado.	100

Lista de tablas

Tabla 3.1.	Definición de los materiales.	29
Tabla 3.2.	Tamaño de elemento en los dominios.	30
Tabla 3.3.	Resistencia e inductancia en el núcleo, método de la energía (P y W_m)	37
Tabla 3.4.	Inductancia en el aislamiento principal, método de la energía (W_m)	37
Tabla 3.5.	Resistencia e inductancia en el blindaje interior, método de la energía (P y W_m).	37
Tabla 3.6.	Resistencia e inductancia en el blindaje exterior, método de la energía (P y W_m).	38
Tabla 3.7.	Inductancia en la cubierta, método de la energía (W_m).	38
Tabla 3.8.	Resistencia e inductancia en suelo, método de la energía (P y W_m).	38
Tabla 3.9.	Resistencia e inductancia mutua del blindaje, método de la energía (P y W_m).	39
Tabla 3.10.	Resistencia e inductancia propias en la malla 1 y malla 2, respectivamente.	40
Tabla 3.11.	Resistencia e inductancia propia de la malla 1 y malla 2, respectivamente (con frontera de continuidad para campo magnético).	41
Tabla 3.12.	Resistencia e inductancia propia de la malla 1 y malla 2, respectivamente (sin frontera de continuidad para campo magnético).	42
Tabla 3.13.	Capacitancias en el cable coaxial sin capa semiconductor.	44
Tabla 3.14.	Capacitancias en el cable coaxial sin y con capa semiconductor.	46

Nomenclatura

MatLab®	Programa comercial de lenguaje de programación (Matrix Laboratory, por sus siglas en inglés).
MEF	Método del Elemento Finito (Finite Element Method, por sus siglas en inglés). Método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales.
COMSOL Multiphysics4.4®	Paquete computacional que aplica el Método del Elemento Finito en la resolución de diversos problemas físicos y de ingeniería.
EMTP	Programa de Transitorios Electromagnéticos (Electromagnetic Transient Program, por sus siglas en inglés).
IFT	Transformada de Fourier Inversa (Inverse Fourier Transform, por sus siglas en inglés).
DFT	Transformada Discreta de Fourier (Discrete Fourier Transform, por sus siglas en inglés).
MFT	Transformada Modificada de Fourier (Modified Fourier Transform, por sus siglas en inglés).
FFT	Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform, por sus siglas en inglés).
NLT	Transformada Numérica de Laplace (Numerical Laplace Transform, por sus siglas en inglés).
NILT	Transformada Numérica de Laplace Inversa (Numerical Inverse Laplace Transform, por sus siglas en inglés).
EMTP/RV®	Programa de Transitorios Electromagnéticos (Electromagnetic Transient Program, por sus siglas en inglés).
EMTP/ATP®	Programa de Transitorios Electromagnéticos (Alternative Transient Program, por sus siglas en inglés).
PSCAD/EMTDC®	Programa de Transitorios Electromagnéticos (Power Systems Computer Aided Design / Electromagnetic Transient including CD, por sus siglas en inglés).
ULM	Modelo Universal de Línea (Universal Line Model, por sus siglas en inglés).
FTP	Programa Generalizado de Transitorios Electromagnéticos en el Dominio de la Frecuencia (Frequency Domain Transient Program, por sus siglas en inglés).
SEP	Sistema Eléctrico de Potencia.
TEM	Modo de Propagación Transversal Electromagnético (Transverse Electromagnetic Wave, por sus siglas en inglés).

$\mathbf{V}(z, s)$	Vector de tensión en el dominio de la frecuencia.
$\mathbf{I}(z, s)$	Vector de corrientes en el dominio de la frecuencia.
$\mathbf{Z}(s)$	Matriz de impedancia serie en el dominio de la frecuencia.
$\mathbf{Y}(s)$	Matriz de admitancia en derivación en el dominio de la frecuencia.
$\mathbf{A}(s)$	Matriz diagonal.
$\mathbf{A}(s)^t$	Traspuesta de la matriz diagonal.
$\boldsymbol{\lambda}(s)$	Matriz de valores propios.
$\mathbf{M}(s)$	Matriz de vectores propios.
$\mathbf{V}_m(z, s)$	Vector de tensiones modales en el dominio de la frecuencia.
C_1, C_2	Constantes de integración.
γ	Constante de propagación modal.
α	Constante de atenuación.
β	Constante de fase.
$\boldsymbol{\Gamma}(s)$	Matriz de las constantes de propagación.
$\boldsymbol{\Psi}(s)$	Matriz diagonalizable de tensiones.
\mathbf{I}_0	Vector de corrientes en el extremo emisor de la línea.
\mathbf{V}_0	Vector de tensiones en el extremo emisor de la línea.
\mathbf{I}_ℓ	Vector de corrientes en el extremo receptor de la línea.
\mathbf{V}_ℓ	Vector de tensiones en el extremo receptor de la línea.
\mathbf{Y}_0	Matriz de admitancias características.
\mathbf{Z}_0	Matriz de impedancias características.
\mathbf{Y}_{SS}	Admitancia propia conectada al nodo en su extremo emisor
\mathbf{Y}_{SR}	Admitancia mutua conectada a los nodos en sus extremos emisor y receptor.

Y_{RS}	Admitancia mutua conectada a los nodos en sus extremos emisor y receptor.
Y_{RR}	Admitancia propia conectada al nodo en su extremo receptor.
Z_{N_N}	Impedancia propia del núcleo.
Z_{B_N}	Impedancia mutua del núcleo y blindaje.
Z_{B_B}	Impedancia propia del blindaje.
Z_N	Impedancia interna del conductor.
Z_{AIS_1}	Impedancia del aislamiento principal.
Z_{B_INT}	Impedancia interna del blindaje.
Z_{B_EXT}	Impedancia externa del blindaje.
Z_{AIS_2}	Impedancia de la cubierta de PVC.
Z_S	Impedancia propia del retorno por tierra.
Z_{B_M}	Impedancia mutua del blindaje.
Y_1	Admitancia propia del aislamiento principal.
Y_2	Admitancia propia de la cubierta del cable.
$Z(\omega)$	Matriz de impedancias serie dependiente de la frecuencia.
Y	Matriz de admitancias paralelo.
σ	Conductividad del material.
ϵ	Permitividad absoluta.
ϵ_0	Permitividad del vacío.
ϵ_r	Permitividad relativa del material.
μ	Permeabilidad magnética absoluta.
μ_0	Permeabilidad magnética del vacío.
μ_r	Permeabilidad magnética relativa del material.
V	Caída de potencial en el conductor p.u.l.
I	Corriente total.
J	Densidad de corriente total.
J_s	Densidad de corriente de excitación.
J_e	Densidad de corriente de eddy.
J_d	Densidad de corrientes de desplazamiento.
J_{ext}	Densidad de corriente externa.
H	Intensidad de campo magnético.

B	Densidad de flujo magnético.
E	Intensidad de campo eléctrico.
D	Densidad de flujo eléctrico.
A	Potencial vectorial magnético.
∇V	Potencial escalar eléctrico.
$R(\omega)$	Resistencia serie dependiente de la frecuencia.
$L(\omega)$	Inductancia serie dependiente de la frecuencia.
P	Pérdidas por efecto Joule.
W_m	Energía magnética.
$W_{m_{ii}}$	Energía magnética debida a un conductor excitado.
$W_{m_{ij}}$	Energía magnética debida a dos conductores excitados.
Z_{com}	Impedancia compleja.
L_{ii}	Inductancia propia
M_{ij}	Inductancia mutua
Z_{ij}	Impedancia compleja mutua entre conductor i y j, impedancia compleja propia cuando $i = j$.
W_e	Energía eléctrica en el aislante debida a un conductor excitado.
$W_{e_{ij}}$	Energía eléctrica en el aislante debida a dos conductores excitados.
$ V $	Diferencia de potencial.
ρ_e	Densidad de energía eléctrica.
$\frac{dV}{dz}$	Diferencial de tensión en la dirección del eje z.
V_i	Tensión en conductor i.
V_j	Tensión en conductor j
G	Conductancia en derivación del cable.
C	Capacitancia propia del cable.
C_{ij}	Capacitancia mutua del cable.
C_i	Capacitancia propia en el conductor debida solo a V_i .
C_j	Capacitancia propia en el conductor debida solo a V_j .
q	Carga superficiales en el conductor.
$\mathbf{n} \times$	Componente tangencial
$\nabla \times$	Operador rotacional.
$\nabla \cdot$	Operador divergencia.

∇	Operador gradiente.
∇^2	Laplaciano.
\times	Producto cruz.
\cdot	Producto punto.
2D	Espacio geométrico de dos dimensiones.
$\frac{d}{dz}$	Operador diferencial de primer orden.
$\frac{d^2}{d^2z}$	Operador diferencial de segundo orden.
Δ	Profundidad de penetración.
δ_{\max}	Profundidad de penetración máxima.
δ_{\min}	Profundidad de penetración mínima.
f_{\max}	Frecuencia simulada.
f_{\min}	Frecuencia máxima de operación.
f	Frecuencia mínima de operación.
ω	Frecuencia angular.
L_{ind_1}	Inductancia en el núcleo.
L_{ind_2}	Inductancia en el aislamiento principal.
L_{ind_3}	Inductancia en el blindaje.
L_{ind_4}	Inductancia en la cubierta.
L_{ind_5}	Inductancia en el suelo y aire.
R_{core}	Pérdidas en el núcleo.
R_{sheath_1}	Pérdidas en la cara interior del blindaje.
R_{sheath_2}	Pérdidas en la cara exterior del blindaje.
R_{soil}	Pérdidas en el suelo.
W_{m_1}	Energía magnética en el núcleo.
W_{m_2}	Energía magnética en el aislamiento principal.
W_{m_3}	Energía magnética en el blindaje.
W_{m_4}	Energía magnética en la cubierta.
W_{m_5}	Energía magnética en el suelo y aire.
P_{core}	Pérdidas en el núcleo.
P_{sheath}	Pérdidas en el blindaje.
P_{soil}	Pérdidas en el suelo.

I_{curr_1}	Corriente en el núcleo.
I_{curr_2}	Corriente en el blindaje.
I_{curr_3}	Corriente en el suelo.
$Z1_{core}$	Impedancia del núcleo.
$Z1_{sheath}$	Impedancia interior del blindaje.
$Zloop1_{self}$	Impedancia propia de la malla 1.
$Rloop1_{self}$	Pérdidas propias de la malla 1.
$Lloop1_{self}$	Inductancia propia de la malla 1.
$Z2_{sheath}$	Impedancia exterior del blindaje.
$Z2_{soil}$	Impedancia del suelo.
$Zloop2_{self}$	Impedancia propia de la malla 2.
$Rloop2_{self}$	Pérdidas propias de la malla 2.
$Lloop2_{self}$	Inductancia propia de la malla 2.
V_{ap}	Voltaje aplicado.
p. u.	Por unidad.

Capítulo 1. Introducción.

1.1 Introducción.

Históricamente, las líneas aéreas de transmisión han sido el medio principal para el transporte de energía eléctrica desde las centrales generadoras hacia los centros de consumo. Sin embargo, en últimas décadas, el paulatino aumento en los niveles de tensión, las grandes distancias requeridas para la transmisión y distribución de energía eléctrica, así como la construcción de parques eólicos, hacen de los sistemas subterráneos una opción atractiva para el suministro de energía eléctrica [1].

En principio, es importante mencionar que la inversión inicial requerida para la construcción de sistemas subterráneos es mucho mayor que sus equivalentes en líneas aéreas, por lo que su uso puede justificarse cuando las restricciones ambientales de estas últimas no permiten su construcción. Con los sistemas subterráneos se tienen algunos otros beneficios, como son el de ser menos propensos a sufrir disturbios al no estar expuestos directamente a los efectos climatológicos como: nieve, lluvia, descargas atmosféricas, etc.. También, con estos tipos de sistemas se reducen la contaminación visual, los riesgos de accidentes, los costos por mantenimiento y los problemas de interferencia electromagnética [2] [3].

Al igual que las líneas de transmisión aéreas, los sistemas de cables subterráneos se encuentran expuestos a distintos tipos de perturbaciones, tales como los transitorios electromagnéticos, los cuales se deben fundamentalmente a descargas atmosféricas, maniobras de interruptores y fallas.

Las sobretensiones y sobrecorrientes que llegan a ocurrir durante los transitorios electromagnéticos pueden ocasionar esfuerzos considerables no solo en los aislamientos de los propios cables subterráneos, sino también en equipos vecinos como transformadores e interruptores. En el peor de los casos, esto puede resultar en interrupciones en el suministro de energía eléctrica. Por lo tanto, es necesario realizar estudios que permitan predecir estos esfuerzos y tomar decisiones respecto a mejoras en el diseño de componentes y a la protección de los mismos [4].

Debido al gran interés en el estudio de los transitorios electromagnéticos asociados a la operación de los sistemas subterráneos, existe una búsqueda constante de mejores modelos de cables. Se busca que los modelos sean capaces de reproducir correctamente los fenómenos transitorios para un amplio intervalo de frecuencias, idealmente desde su operación en estado permanente hasta la etapa transitoria en el orden de los MHz [5].

El conocimiento preciso de los fenómenos involucrados en este espectro de frecuencias permite seleccionar el tipo de modelo que mejor represente el fenómeno en cuestión. De acuerdo con lo anterior, se tienen modelos de parámetros concentrados y modelos de parámetros distribuidos. Los modelos de parámetros concentrados parten de la teoría clásica de circuitos a través de las leyes de Kirchhoff y suelen usarse en simulaciones de procesos transitorios de baja frecuencia en el orden de 0.1 Hz a 3 kHz, originados por

sobretensiones temporales, de acuerdo a la clasificación que otorga la CIGRE [6]. Por otro lado, los modelos de parámetros distribuidos son más precisos, ya que representan de una mejor manera el fenómeno de propagación de ondas en simulaciones de transitorios por maniobra de interruptores y descargas atmosféricas.

Existe una gran variedad de modelos en el dominio del tiempo para el análisis de transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión, los cuales están disponibles principalmente en programas del tipo EMTP y están basados en la solución de las ecuaciones de ondas viajeras. Además, son capaces de tomar en consideración la dependencia respecto a la frecuencia de los parámetros eléctricos. Estos modelos se encuentran reportados en trabajos publicados en los últimos 40 años [7], [8], [9], [10] y [11]. Por otro lado, para el caso de cables subterráneos los modelos existentes en software de tipo EMTP están limitados a ciertas configuraciones de cables del tipo coaxial y tipo tubo, cuando en realidad existe una gran variedad de geometrías de cables en el mercado. En la mayoría de los programas de este tipo se incluyen rutinas de apoyo a través de formulaciones analíticas para el cálculo de los parámetros eléctricos de impedancia serie y admitancia en derivación, donde el usuario únicamente tiene que especificar como datos de entrada la geometría y propiedades de los materiales del cable. A pesar de las buenas aproximaciones obtenidas en estas formulaciones, suele despreciarse el efecto de proximidad. Otro aspecto vital es el relacionado al cálculo de la impedancia de retorno por tierra, ya que en los modelos existentes se hacen algunas simplificaciones considerando que el suelo es homogéneo y semi-infinito, suponiendo por ende una distribución uniforme de la corriente de retorno por tierra [12], [13]. Esto difiere de la realidad, dados los estratos con diferentes propiedades electromagnéticas que conforman el suelo.

De forma alternativa se han desarrollado modelos en el dominio de la frecuencia basados en la transformada de Fourier, la transformada de Laplace o la transformada Z. Estos modelos suelen ser más precisos, ya que la inclusión de dependencia frecuencial de los parámetros eléctricos se realiza de manera natural en el dominio de la frecuencia; por lo tanto, son utilizados comúnmente con propósitos de validación de los modelos desarrollados en el dominio del tiempo [11].

El conocimiento preciso de los parámetros eléctricos dependientes de la frecuencia es de gran importancia, ya que dichos parámetros sirven como datos de entrada a modelos para análisis de transitorios electromagnéticos, así como en estudios relacionados a diseño de aislamientos, estimación de potencial de tierra, calidad de la energía (armónicos, resonancia, tensiones no sinusoidales) y compatibilidad electromagnética [14].

Aunque las formulaciones analíticas pueden proporcionar resultados precisos de una forma práctica, su aplicación se limita a ciertas geometrías simples de cables. Es por esto que en años recientes, métodos numéricos como el Método del Elemento Finito (MEF) han sido empleados como una alternativa para tal propósito. El MEF ha sido aplicado con éxito en el cálculo de parámetros eléctricos de diferentes tipos de geometrías y configuraciones de cables subterráneos, despertando interés entre los investigadores alrededor del mundo [13], [14], [15].

1.2 Objetivos.

- Desarrollar una metodología para el cálculo de los parámetros eléctricos de impedancia serie y admitancia en derivación por unidad de longitud de los cables subterráneos del tipo coaxial, mediante el uso del MEF a través del paquete comercial COMSOL Multiphysics 4.4®.
- Implementar un modelo en el dominio de la frecuencia a través de la transformada numérica de Laplace inversa (TNLI) para el análisis de transitorios electromagnéticos.
- Comparar las respuestas de las simulaciones en el dominio del tiempo del software comercial PSCAD-EMTDC® con las respuestas del modelo en el dominio de la frecuencia implementado en MatLab®.
- Comparar el espectro de frecuencia de los parámetros eléctricos calculados a partir de las aproximaciones analíticas con los obtenidos con el MEF.
- Analizar el efecto de las pantallas semiconductoras en las respuestas transitorias de voltaje de cables subterráneos monopolares.

1.3 Antecedentes.

El primer trabajo de transitorios electromagnéticos en sistemas de potencia está relacionado con las investigaciones sobre las características de propagación de onda hechas por Lord Kelvin hacia 1854, quien investigó la distorsión de la señal en el cable trasatlántico que conectaba la isla Valentina en Irlanda con la isla Newfoundland en la costa este de Canadá [1].

En 1874 Oliver Heaviside en su artículo 'On telegraphic signalling with condensers' reportó un análisis del comportamiento transitorio de un cable excitado por un escalón unitario en uno de sus extremos y una carga capacitiva en su otro extremo (no aterrizado). En dicho documento el método desarrollado era una extensión de los resultados obtenidos por Sir William Thomson (más conocido como Lord Kelvin) en el modelado del cable submarino, pues solo modificó la ecuación del cable al incluir un término adicional que considera la inductancia del cable, con lo cual obtuvo un par de ecuaciones diferenciales parciales que hoy en día son conocidas como ecuaciones del telegrafista [16].

Hacia 1930 se establecieron las bases de la teoría de ondas viajeras formuladas en el dominio del tiempo, lo cual favoreció el surgimiento de los primeros métodos gráficos como los de Bewley y Bergeron para la representación de transitorios electromagnéticos [17]. El primero fue implementado computacionalmente por K.L. Carlsson en 1970, y requiere como datos de entrada el conocimiento preciso de los coeficientes de reflexión y transmisión de las ondas para su funcionamiento [18]. Por otro lado, el método de Bergeron fue la base para que H. Dommel en 1969 desarrollara un programa computacional para el

análisis de transitorios electromagnéticos conocido como EMTP [19]. Sin embargo, en estos primeros métodos los parámetros de la línea se consideraban constantes, es decir, no se consideraba la dependencia frecuencial de los parámetros eléctricos debida al efecto piel tanto en conductores como en el retorno de corriente a través del suelo. Por estos mismos años, se desarrollaron algunos métodos teóricos para el cálculo de transitorios electromagnéticos [20], así como fórmulas exactas de la impedancia interna de un conductor, impedancias de retorno por tierra y admitancia de una línea aérea para estudiar las interferencias de las líneas telefónicas de las líneas de distribución de energía eléctrica [21], [22], [23], [24].

Dada la importancia de representar de una mejor manera el comportamiento real de los transitorios electromagnéticos ante los efectos producidos por la dependencia frecuencial de los parámetros eléctricos de líneas aéreas y cables subterráneos, a lo largo de los años se han desarrollado e implementado diversos modelos en el dominio del tiempo incluyendo dichos efectos.

Enseguida se presenta una breve reseña de la evolución que los modelos en el dominio del tiempo han tenido a largo de los años, mismos que están disponibles principalmente en programas computacionales para análisis de transitorios electromagnéticos como son el EMTP/RV®, el EMTP/ATP® y el PSCAD/EMTDC®. Cabe mencionar que la elección de cada uno de estos modelos depende del tipo de fenómeno a representar, así como de la exactitud con la cual se requiere representar dicho fenómeno.

El “Constant Parameter Line Model” (CP) es el modelo más simple, ya que no toma en cuenta la dependencia frecuencial de los parámetros eléctricos; éste modelo fue implementado inicialmente por H. Dommel en 1969 a partir del método de Bergeron [19], por lo cual se encuentra disponible en los programas de tipo EMTP bajo el nombre de “Bergeron Model”.

En 1974, H. Dommel y W. Meyer tomaron como base el trabajo de J. Snelson [25] para poder incluir la dependencia frecuencial de los parámetros al modelo de línea de transmisión en el EMTP [26].

En 1982, J. Martí [8] propuso un modelo dependiente de la frecuencia en el dominio modal, en el cual la línea se representa por su impedancia característica para un amplio intervalo de frecuencias, así como por una función de propagación. La desventaja de este modelo es que la matriz de transformación modal se considera real y constante, por lo que su exactitud se encuentra limitada a algunos casos de líneas aéreas simétricas y balanceadas. En su trabajo J. Martí incluyó la técnica de convolución recursiva previamente propuesta por A. Semlyen y A. Dubuleanu en 1975 [7]. Este modelo se encuentra implementado en el programa comercial PSCAD-EMTDC® bajo el nombre de “Frequency Dependent (Mode) Model”, mientras que en EMTP/ATP se conoce como “JMarti Setup”.

Posteriormente, en 1988, L. Martí [9], propuso una técnica para tomar en cuenta la dependencia frecuencial de las matrices de transformación modal, mejorando el modelo de J. Martí [8]. Este modelo ha sido aplicado con éxito a cables subterráneos, más no así a líneas aéreas.

En 1997, F. Marcano y J. Martí [27] desarrollaron un modelo dependiente de la frecuencia utilizando el método de matrices idempotentes, en el cual la función de propagación se puede representar como una matriz en coordenadas de fase en razón de los modos de propagación de la línea o del cable. En 1998, B. Gustavsen y A. Semlyen desarrollaron un modelo para las funciones de transferencia de la matriz de admitancia característica y la función de propagación en el dominio de fases utilizando la herramienta conocida como “Vector Fitting” [28].

En 1999, A. Morched *et al.* [11] desarrollaron un modelo dependiente de la frecuencia directamente en el dominio de fases conocido como Modelo Universal de Línea (ULM, por sus siglas en inglés), el cual hace un ajuste adecuado de las matrices de transformación; la base del modelo fue la técnica desarrollada en [27] y la técnica del “Vector Fitting” [28]. Hoy en día es el modelo con mayor exactitud para el análisis de transitorios electromagnéticos en líneas multiconductoras, tanto para sistemas aéreos como subterráneos. Este modelo se encuentra disponible en el programa comercial PSCAD-EMTDC® bajo el nombre de “Frequency Dependent (Phase) Model”.

En todos estos modelos en el dominio del tiempo, la mayor desventaja es no poder representar de manera exacta la dependencia frecuencial de los parámetros, por lo que un método alternativo es el empleo de modelos en el dominio de la frecuencia, en los cuales se tiene un mejor control sobre los errores numéricos ocasionados por esta alta dependencia frecuencial, ya que se trabaja directamente en este dominio [6].

Las primeras investigaciones para el análisis de transitorios electromagnéticos en el dominio de la frecuencia iniciaron con el uso de la transformada discreta de Fourier (DFT, por sus siglas en inglés). Sin embargo, debido a que durante el proceso de transformación del dominio de la frecuencia al tiempo se presentaban errores por truncamiento (oscilaciones de Gibbs) y discretización (aliasing), se le adicionó a la DFT una función ventana y un factor de amortiguamiento, con lo que fue posible reducir estos errores. A esta variante se le denominó inicialmente transformada modificada de Fourier (MFT, por sus siglas en inglés) [29], [30].

En años posteriores, la MFT fue utilizada por A. Ametani y L. Wedepohl por separado. El primero desarrolló la transformada de Fourier en forma exponencial para su aplicación a transitorios electromagnéticos [31]. Por su parte, L. Wedepohl empleó la MFT en el análisis transitorio de líneas multiconductoras [32] y cables subterráneos [33].

Más tarde, para reducir el tiempo computacional empleado por la MFT en el análisis transitorio, el propio A. Ametani utilizó el algoritmo de la transformada rápida de Fourier [34] (FFT, por sus siglas en inglés), que previamente había sido implementado por J.W. Cooley y J.W. Tukey [35].

En 1978, D.J. Wilcox expresó la MFT en términos de la teoría de Laplace, y fue así como se introdujo la transformada numérica de Laplace (NLT, por sus siglas en inglés) [36].

En 1998, N. Nagaoka *et al.* desarrollaron un programa generalizado de transitorios electromagnéticos en el dominio de la frecuencia (FTP, por sus siglas en inglés) basado en

la MFT. Este programa permite representar elementos de parámetros concentrados o distribuidos, así como la apertura de interruptores y no linealidades. [37].

En los últimos años, el algoritmo de la transformada numérica de Laplace ha sido aplicado con bastante éxito en el cálculo de transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión y cables subterráneos, así como a otros elementos del sistema de potencia. [2], [38], [39], [40], [41].

1.4 Estado del arte.

Comúnmente, el análisis de transitorios electromagnéticos en cables subterráneos se realiza a partir de la solución de las ecuaciones del telegrafista, ecuaciones que están planteadas en función de los parámetros de la impedancia serie y la admitancia en derivación.

La alta dependencia frecuencial de los parámetros eléctricos, así como el efecto que las corrientes de retorno por tierra ejercen sobre la matriz de impedancia serie $\mathbf{Z}(\omega)$, son temas de gran interés entre los investigadores alrededor del mundo [42] [43], tomando en cuenta que estos parámetros son necesarios como datos de entrada en modelos de cables para análisis de transitorios electromagnéticos, así como para algunos estudios de diseño de aislamiento, estimación de elevación de potencial de tierra, calidad de la energía (armónicos, resonancia, tensiones no sinusoidales) y compatibilidad electromagnética [14]. Por esta razón, existe una búsqueda constante de nuevos mecanismos que permitan calcular de manera certera los parámetros de impedancia serie y admitancia en derivación. Por lo que, en la presente sección se abordan dos rubros para la determinación de estos parámetros. En el primero, se expone de manera cronológica los trabajos de las primeras aproximaciones analíticas para el cálculo de las impedancias y admitancias de cables coaxiales monopolares y tipo tubo, así como algunos modelos de aproximación en el cálculo de la impedancia de retorno por tierra, la cual suele ser compleja debido a la gran dependencia respecto a la frecuencia. Posteriormente, en un segundo grupo se introduce el uso de técnicas numéricas como lo es el Método del Elemento Finito para el cálculo de dichos parámetros.

En 1926, F. Pollaczek [22] desarrolló una aproximación para el cálculo de la impedancia de retorno por tierra, en la que se requiere evaluar una integral infinita que no posee solución analítica; además, el integrando es de naturaleza oscilatoria e inestable [44]. En ese mismo año, J.R. Carson [23] publicó una teoría basada en las ecuaciones de Maxwell y en los conceptos de la teoría de circuitos, similar a la teoría desarrollada por F. Pollaczek. Los resultados obtenidos por J.R. Carson son la base para la mayoría de los estudios sobre los campos electromagnéticos, la propagación de las ondas y los efectos de las inducciones de las líneas de transmisión aéreas. En ambos enfoques se supone una distribución homogénea y semi-infinita en el suelo.

En 1934, S.A. Schelkunoff [21] propuso una formulación para el cálculo de la impedancia interna de conductores tubulares a través de funciones de Bessel, mientras que para el cálculo de la admitancia en derivación se aplicó la matriz de coeficientes de potencial, llamada también matriz de coeficientes de Maxwell [45].

En 1973, L.M. Wedepohl y D.J. Wilcox [33] propusieron una metodología para analizar el fenómeno de las ondas viajeras en estado estable de los sistemas de transmisión subterráneos. También mostraron que mediante las técnicas de la transformada de Fourier era factible su aplicación a problemas en estado transitorio. En esta metodología la integral de Pollaczek fue aproximada con series infinitas y en ella se podía tomar en cuenta el efecto piel en conductores y en el suelo. De igual manera, era posible calcular la admitancia en derivación con la limitante de que para ello la permitividad permanecía invariante a la frecuencia.

En 1975, G.W. Brown [46] *et al.* desarrollaron fórmulas para las impedancias de cables tipo tubo. En 1976, C. Gary [47] propuso un método alternativo para el cálculo de la impedancia serie generalizada, en el que se parte de la suposición de que las corrientes de retorno por tierra se concentran en una superficie plana ficticia, paralela al plano de tierra, con una profundidad δ . La impedancia serie generalizada se determina mediante el método de imágenes complejas. Este enfoque suele ser preciso en altas frecuencias. Su limitante es suponer que el suelo es semi-infinito y homogéneo en todas sus direcciones.

En 1980, A. Ametani [48] desarrolló un enfoque para el cálculo de las impedancias y admitancias de cables coaxiales monopolares, así como de cables tipo tubo, el cual fue incluido en el EMTP. Posteriormente, en 1986, el propio A. Ametani [19] propuso un modelo para el cálculo de la impedancia de retorno por tierra, que es una simplificación de la teoría de J. R. Carson.

En 1996, O. Saad *et al.* [49] propusieron un modelo para determinar la impedancia de retorno por tierra a través de una aproximación en forma cerrada en el plano complejo. Esta aproximación es la que hoy en día presenta el menor error comparada con la integral de F. Pollaczek [50], y por ello es la que se presenta en la implementación del modelo desarrollado en esta tesis; sin embargo, tiene la limitante de no ser tan exacta a altas frecuencias y a pequeños valores de resistividad en el suelo [12].

En 1998, T. Nguyen [51] propuso un modelo para determinar la impedancia de retorno por tierra empleando integración numérica directa el cual, a pesar de ser eficiente computacionalmente, puede presentar problemas numéricos.

En 2001, F.A. Uribe *et al.* [52] desarrollaron e implementaron un algoritmo de integración numérica confiable y con alta eficiencia computacional para el cálculo de la impedancia de retorno por tierra.

A pesar de que estas aproximaciones dan buenos resultados hasta unos cuantos MHz por el hecho de tomar en cuenta el efecto piel, tienen algunas desventajas al no considerar el efecto de proximidad [6], el cual se vuelve más importante conforme se incrementa la frecuencia. Además, se supone que el suelo es homogéneo y semi-infinito, lo que difiere de la realidad, dados los estratos con diferentes propiedades electromagnéticas que lo conforman. Otro problema es que las fórmulas existentes hasta la fecha están limitadas a geometrías particulares de cables. Por lo tanto, en décadas recientes métodos numéricos como el MEF se han utilizado con éxito para el cálculo de parámetros en sistemas de transmisión aéreos y subterráneos.

En 1982, J. Weiss *et al.* [53] [54] combinaron las ecuaciones del MEF que tienen como incógnita al vector densidad de corriente total \mathbf{J} con las ecuaciones que relacionan a este vector con las corrientes en el conductor, y así fue posible resolver las ecuaciones del campo cuasi estacionario magnético, para luego obtener la matriz de impedancia serie $\mathbf{Z}(\omega)$.

En 1989, S. Cristina *et al.* [55] emplearon el MEF para calcular los parámetros dependientes de la frecuencia de resistencia $R(\omega)$ e inductancia $L(\omega)$ tomando en cuenta el efecto piel y efecto de proximidad, así como la capacitancia en un cable trifásico. En este mismo año, Y. Yin *et al.* [56] combinaron el MEF con una técnica llamada perturbación, la cual permite reducir la región de solución en el suelo para calcular los parámetros dependientes de la frecuencia de impedancia serie $\mathbf{Z}(\omega)$ de cables subterráneos monopolares y tipo tubo para su comparación con fórmulas analíticas.

En 1990, A. Darcherif *et al.* [57] presentaron una aplicación del MEF en el cálculo de los parámetros por unidad de longitud de cables multiconductores blindados, así como dos técnicas para reducir los problemas ocasionados por la representación de una región de solución infinita y los errores por un inadecuado refinamiento en el mallado, para su comparación con fórmulas analíticas.

En 2000, G.K. Papagiannis *et al.* [58] utilizaron el enfoque del MEF para calcular los parámetros de una línea de transmisión. El método es capaz de resolver casos con no homogeneidad, estratificación e irregularidades en el suelo.

En 2009, A.W. Cirino *et al.* [5] presentaron una metodología para determinar los parámetros de un cable para un intervalo de frecuencias de 60 a 1 MHz, así como algunas sugerencias para un uso correcto del MEF y la importancia de un buen mallado conforme se incrementa la frecuencia.

Finalmente, un aspecto relevante es el relacionado a trabajos de transitorios electromagnéticos en cables subterráneos y sus accesorios realizados en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Zacatenco, siendo los siguientes.

En 1988, J. Zamudio [59] desarrolló una tesis que lleva por título “Modelado de Cables para Transitorios Electromagnéticos”. En ella se efectúa el cálculo de parámetros mediante las fórmulas analíticas de S.A. Schelkunoff [21] y J.R. Carson [23] para las impedancias en los conductores cilíndricos y de retorno por tierra, así como la respuesta transitoria de voltajes modales aplicando la TNIL para cables coaxiales y tipo tubo. Para ello se obtuvieron previamente los eigenvalores y eigenvectores del paquete de computadora “EINSPAC”.

En 1998, R. Adame [60] estudió los transitorios electromagnéticos en cables mediante un modelo en el dominio de fases. En 2010, C. Guerra [61] analizó los esfuerzos eléctricos y térmicos en empalmes de media tensión alimentados con tensiones no sinusoidales, siendo estos tres trabajos los únicos registros en este tema hasta la fecha en esta unidad académica.

1.5 Justificación.

Los sistemas de cables subterráneos están siendo utilizados cada vez más en la transmisión y distribución de energía eléctrica, por lo que es necesario contar con diseños cada vez más confiables ante posibles contingencias o disturbios que puedan afectar o poner en riesgo el suministro de energía eléctrica.

Al igual que otros equipos del SEP, los cables subterráneos se encuentran sometidos a distintos tipos de transitorios electromagnéticos, por lo que es necesario determinar la magnitud y duración que las sobretensiones o sobrecorrientes que pudieran alcanzarse durante estos eventos. Al conocer los máximos esfuerzos a los que se ven sometidos los cables se pueden buscar soluciones para no interrumpir la continuidad en el servicio de energía eléctrica por fallas inesperadas.

Hoy en día, programas computacionales para análisis de transitorios electromagnéticos como el EMTP/RV®, el EMTP/ATP® o el PSCAD/EMTDC®, utilizan modelos de líneas en el dominio del tiempo para analizar el comportamiento transitorio de cables subterráneos. Sin embargo, la alta dependencia frecuencial de los parámetros (efecto piel y efecto de proximidad), las corrientes de retorno por tierra, así como la cercanía de los propios conductores en sistemas subterráneos indican que estos modelos pueden ser mejorados.

Es por ello que en esta tesis se implementa un modelo para análisis de transitorios electromagnéticos en el dominio de la frecuencia, a través de la transformada numérica de Laplace. La precisión de este modelo dependerá en gran medida del procedimiento utilizado para el cálculo de los parámetros de impedancia serie $Z(\omega)$ y admitancia en derivación Y , pudiéndose obtener de aproximaciones analíticas o de algún método numérico como el MEF.

A diferencia de las aproximaciones analíticas que solo están disponibles para cables coaxiales concéntricos o tipo tubo, con el MEF es posible determinar los parámetros de impedancia serie dependientes de la frecuencia de cualquier tipo de geometría de cable, así como considerar el efecto de proximidad y representar de mejor manera el efecto de las corrientes de retorno en el suelo. Con esta metodología se pueden determinar los parámetros de impedancia serie $Z(\omega)$ y admitancia en derivación Y de cualquier geometría de cable subterráneo, para su posterior introducción en modelos para el cálculo de transitorios electromagnéticos en cables.

1.6 Limitaciones y alcances.

1.6.1 Limitaciones.

El modelo de línea en el dominio de la frecuencia para el análisis de transitorios electromagnéticos implementado en este trabajo, se aplica a cables subterráneos uniformes (concéntricos monopolares), es decir, se supone que los conductores (núcleo y blindaje) son paralelos entre sí y al suelo; por lo tanto, no hay variación longitudinal en la separación entre conductores y por ende en sus parámetros eléctricos.

El modelo desarrollado es aplicable a cables subterráneos con aterrizamiento de pantallas metálicas en uno o en ambos de sus extremos, más no así a sistemas con transposición de pantallas (crossbonding), empalmes y suelos con diferentes propiedades electromagnéticas, con el fin de reducir la complejidad del problema.

En lo que respecta al cálculo de parámetros utilizando el MEF, se hacen algunas suposiciones, tales como que el medio es isotrópico, lineal y homogéneo, además de no haber corrientes de desplazamiento; sin embargo, esto no es una limitante del paquete computacional, sino que se hizo de esta manera para su comparación con las formulaciones analíticas. Por otro lado, la discretización de la región de solución, así como el refinamiento del mallado para representar el efecto piel conforme se incrementa la frecuencia, reduce la eficiencia computacional, por lo que la mayor frecuencia a la que se calculan los parámetros es de 1 MHz.

En este trabajo las respuestas de sobretensiones transitorias, así como el cálculo de parámetros empleando el MEF, se concretan a cables concéntricos monopolares.

1.6.2 Alcances.

Para determinar las sobretensiones transitorias en los diferentes conductores del cable, se considera que los modos de propagación son transversales electromagnéticos (TEM, por sus siglas en inglés), por lo que es posible aplicar las ecuaciones del telegrafista que incluyen los parámetros de impedancia serie $Z(\omega)$ y admitancia en derivación Y .

El modelo implementado en el dominio de la frecuencia permite incluir de manera natural la dependencia frecuencial de los parámetros eléctricos, por lo que es posible validar su aplicación al compararlo con el Modelo Universal de Línea en el dominio del tiempo.

Se establece una metodología para el cálculo de los parámetros eléctricos basada en el MEF para su comparación con las formulaciones analíticas desarrolladas por Schelkunoff, Wedepohl/Wilcox y Saad *et al.* para las impedancias en los conductores coaxiales y de retorno por tierra, respectivamente, para un barrido paramétrico de frecuencias de 60 Hz a 1 MHz.

Finalmente, se realiza una comparación de los espectros de frecuencia de los parámetros obtenidos de formulaciones analíticas con los calculados por el MEF, analizando la importancia de tomar en cuenta el efecto de proximidad.

1.7 Estructura de la tesis.

Este trabajo de tesis está organizado como se describe a continuación:

Capítulo 1. Introducción.

Se indican los objetivos, antecedentes, estado del arte, justificación, así como las limitaciones y alcances a lo largo del presente trabajo de investigación.

Capítulo 2. Modelado de cables subterráneos.

Se presentan las ecuaciones del telegrafista en el dominio de la frecuencia que describen el comportamiento de cables subterráneos, así como el modelo de dos puertos que relaciona los voltajes y corrientes en el extremo emisor con el extremo receptor.

Capítulo 3. Cálculo de parámetros eléctricos de cables subterráneos utilizando el MEF.

Se presenta una metodología para el cálculo de los parámetros de impedancia serie y admitancia en derivación empleando el MEF, así como la comparación de éstos con los parámetros obtenidos de fórmulas analíticas.

Capítulo 4. Cálculo de sobretensiones transitorias mediante el modelo implementado y comparaciones con PSCAD/EMTDC®.

Se presenta el desarrollo de un modelo en el dominio de la frecuencia empleando la técnica de la transformada numérica de Laplace para obtener las respuestas de tensión, el cual posteriormente se compara con las respuestas obtenidas del modelo de fases incluido en el programa comercial PSCAD-EMTDC®.

Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros.

Se mencionan las conclusiones de lo desarrollado y algunas sugerencias que se pueden aplicar a trabajos futuros.

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

CAPÍTULO 2. Modelado de cables subterráneos.

2.1 Introducción.

Derivado del aumento en la instalación de cables subterráneos para la transmisión y distribución de energía eléctrica, se requiere asegurar un buen diseño y operación adecuada de estos sistemas para así garantizar la continuidad en el servicio de energía eléctrica.

Al igual que las líneas aéreas, una vez en operación los sistemas con cables subterráneos deben ser capaces de soportar diversas perturbaciones, como es el caso de los transitorios electromagnéticos. La determinación de magnitudes y distribución de esfuerzos durante estos eventos ayuda a definir los criterios de diseño del sistema de aislamiento y del sistema de protecciones, lo cual a su vez reduce el riesgo de fallas no solo en el cable sino también en equipos adyacentes. Ésta es la razón principal por la que constantemente se busca desarrollar modelos matemáticos capaces de representar de manera adecuada el comportamiento de los parámetros eléctricos de cables subterráneos para un espectro amplio de frecuencias [4].

Los modelos de cables utilizados en el análisis de transitorios electromagnéticos pueden ser de parámetros concentrados o parámetros distribuidos. Estos últimos son los más utilizados, ya que permiten tomar en cuenta la naturaleza distribuida de los parámetros eléctricos, además de considerar el fenómeno de propagación de ondas a lo largo del cable. Su representación matemática se lleva a cabo mediante ecuaciones diferenciales parciales en el dominio de la frecuencia, para después resolverlas empleando la técnica de descomposición modal, es decir, desacoplando las ecuaciones del Telegrafista en modos. Una vez desacopladas, estas ecuaciones son resueltas en el dominio modal, para posteriormente con la misma transformación convertir las soluciones al dominio de fases.

En la actualidad, el cálculo de la matriz de impedancia serie de cables subterráneos es un tema de gran interés entre los investigadores alrededor del mundo [13], [14], [15] dadas las diferentes estructuras y geometrías de cables existentes. Esta variedad de geometrías ocasiona que esta matriz sea más difícil de calcular en relación a la de una línea aérea, debido a las distancias geométricas pequeñas que separan a sus elementos, además de la dificultad de representar ciertas características tales como: alambres de la pantalla metálica, capas semiconductoras, armaduras y pérdidas dieléctricas [6].

A pesar de que algunas aproximaciones analíticas son capaces de tomar en cuenta el efecto piel, suelen despreciar el efecto de proximidad, por lo que en últimas décadas métodos numéricos como el MEF han sido aplicados con bastante éxito para tal fin. Además, este método permite incluir algunos otros efectos producidos por la conductividad de las capas semiconductoras en el aislamiento, la permeabilidad del acero en las armaduras, así como diferentes propiedades electromagnéticas del suelo.

Por lo tanto, en el presente capítulo se describe la solución a las ecuaciones de la línea de transmisión multiconductora que representan el comportamiento de propagación de ondas en un cable subterráneo mediante la teoría de la descomposición modal. Posteriormente,

mediante una red de dos puertos se relacionan las respuestas de voltaje y corriente del extremo emisor con el extremo receptor.

Más adelante se describe el cálculo de los parámetros de impedancia serie y admitancia en derivación de cables coaxiales al relacionar las impedancias de malla con las impedancias de elemento a través de un análisis de corrientes de malla. Por último, se describe la solución a las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia para obtener los parámetros de impedancia serie y admitancia en derivación, respectivamente.

2.2 Solución de las ecuaciones de la línea de transmisión multiconductora.

Los sistemas de cables subterráneos pueden representarse mediante un modelo de parámetros distribuidos a través de las ecuaciones del telegrafista, las cuales permiten describir la propagación de ondas a lo largo de dichos sistemas.

Partiendo de la teoría de la línea de transmisión multiconductora uniforme en el dominio de la frecuencia, y suponiendo un modo de propagación transversal electromagnético (TEM), estas ecuaciones quedan definidas de la siguiente manera [19]:

$$-\frac{d\mathbf{V}(z, s)}{dz} = \mathbf{Z}(s)\mathbf{I}(z, s) \quad (2.1)$$

$$-\frac{d\mathbf{I}(z, s)}{dz} = \mathbf{Y}(s)\mathbf{V}(z, s) \quad (2.2)$$

donde $\mathbf{V}(z, s)$ e $\mathbf{I}(z, s)$ son los vectores de tensiones y corrientes, $\mathbf{Z}(s)$ y $\mathbf{Y}(s)$ son las matrices de impedancia serie y admitancia en derivación, por unidad de longitud, respectivamente, (en el apéndice A, se muestra el desarrollo matemático del cálculo de estos parámetros para un cable coaxial monopolar) y z es el eje de propagación de los conductores en el cable.

Resolviendo ambas ecuaciones (2.1) y (2.2), se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas en el dominio de fases [2], [19], [33].

$$\frac{d^2\mathbf{V}(z, s)}{dz^2} = \mathbf{A}(s)\mathbf{V}(z, s) \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2\mathbf{I}(z, s)}{dz^2} = \mathbf{A}(s)^t\mathbf{I}(z, s) \quad (2.4)$$

donde:

$$\mathbf{A}(s) = \mathbf{Z}(s)\mathbf{Y}(s) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{A}(s)^t = \mathbf{Y}(s)\mathbf{Z}(s) \quad (2.6)$$

Aplicando descomposición modal, si $\mathbf{A}(s)$ es una matriz diagonalizable, puede definirse como:

$$\mathbf{A}(s) = \mathbf{M}(s)\boldsymbol{\lambda}(s)\mathbf{M}(s)^{-1} \quad (2.7)$$

donde $\lambda(s)$ es la matriz diagonal de valores propios de $\mathbf{A}(s)$ y $\mathbf{M}(s)$ es una matriz cuyas columnas son los vectores propios correspondientes a cada modo de propagación, respectivamente.

Sustituyendo (2.7) en (2.3) se tiene

$$\frac{d^2 \mathbf{V}(z, s)}{d^2 z} = \mathbf{M}(s) \lambda(s) \mathbf{M}(s)^{-1} \mathbf{V}(z, s) \quad (2.8)$$

Definiendo $\mathbf{V}_m(z, s)$, como el vector de voltajes modales

$$\mathbf{V}_m(z, s) = \mathbf{M}(s)^{-1} \mathbf{V}(z, s) \quad (2.9)$$

Para calcular el voltaje respectivo en el dominio de fases, se despeja $\mathbf{V}(z, s)$ de (2.9)

$$\mathbf{V}(z, s) = \mathbf{M}(s) \mathbf{V}_m(z, s) \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) representa un sistema de n ecuaciones diferenciales independientes o desacopladas y se puede representar de la forma

$$\frac{d^2 V_{mi}(z, s)}{d^2 z} = \lambda_i(s) V_{mi}(z, s) \quad (2.11)$$

La solución general de la ecuación (2.11) es similar al caso monofásico y se muestra enseguida:

$$V_{mi}(z, s) = C_{1mi} e^{-\gamma_i z} + C_{2mi} e^{\gamma_i z} \quad (2.12)$$

donde C_{1mi} y C_{2mi} son las constantes de integración que se determinan aplicando las condiciones de frontera; $\gamma_i = \sqrt{\lambda_i(s)} = \alpha_i + j\beta_i$ es la constante de propagación modal del cable; λ_i es el i -ésimo eigenvalor; α_i y β_i son las constantes de atenuación en Np/m y de fase en rad/m del i -ésimo modo, respectivamente.

En forma compacta la ecuación (2.12) queda de la siguiente manera:

$$\mathbf{V}_m(z, s) = \mathbf{C}_{1m} e^{-\Gamma(s)z} + \mathbf{C}_{2m} e^{\Gamma(s)z} \quad (2.13)$$

donde

$\Gamma(s)$ es la matriz de constantes de propagación, dada por

$$\Gamma(s) = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_n \end{bmatrix} = \sqrt{\lambda(s)} \quad (2.14)$$

Las constantes modales de la ecuación (2.13) se expresan en función de constantes de fase de la siguiente manera:

$$\mathbf{C}_{1m} = \mathbf{M}(s)^{-1}\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_{2m} = \mathbf{M}(s)^{-1}\mathbf{C}_2 \quad (2.15)$$

Sustituyendo (2.15) y (2.9) en la ecuación (2.13) y multiplicando ambos lados de la ecuación por $\mathbf{M}(s)$ y aplicando el siguiente teorema: “si $f(\cdot)$ es una función analítica y $\mathbf{A}(s)$ es una matriz diagonalizable tal que $\mathbf{A}(s) = \mathbf{M}(s)\boldsymbol{\lambda}(s)\mathbf{M}(s)^{-1}$ con $\boldsymbol{\lambda}$ diagonal, entonces:”

$$f(\mathbf{A}(s)) = \mathbf{M}(s)f\boldsymbol{\lambda}(s)\mathbf{M}(s)^{-1} \quad (2.16)$$

Aplicando el teorema (2.16) a la ecuación (2.13) se obtiene finalmente la solución para los voltajes en una línea multiconductora:

$$\mathbf{V}(z, s) = \mathbf{C}_1 e^{-\boldsymbol{\Psi}(s)z} + \mathbf{C}_2 e^{\boldsymbol{\Psi}(s)z} \quad (2.17)$$

donde

$\boldsymbol{\Psi}(s) = \mathbf{M}(s)\boldsymbol{\Gamma}(s)\mathbf{M}(s)^{-1}$ es la matriz de vectores propios o eigenvectores.

Para la solución de las corrientes aplicamos (2.17) a la ecuación (2.1) y despejamos $\mathbf{I}(s, z)$:

$$\mathbf{I}(z, s) = -\mathbf{Z}(s)^{-1} \frac{d}{dz} [\mathbf{C}_1 e^{-\boldsymbol{\Psi}(s)z} + \mathbf{C}_2 e^{\boldsymbol{\Psi}(s)z}] \quad (2.18)$$

Diferenciando la ecuación (2.18):

$$\mathbf{I}(s, z) = \mathbf{Z}(s)^{-1} \boldsymbol{\Psi}(s) [\mathbf{C}_1 e^{-\boldsymbol{\Psi}(s)z} - \mathbf{C}_2 e^{\boldsymbol{\Psi}(s)z}] \quad (2.19)$$

Finalmente, se tiene

$$\mathbf{I}(s, z) = \mathbf{Y}_0(s) [\mathbf{C}_1 e^{-\boldsymbol{\Psi}(s)z} - \mathbf{C}_2 e^{\boldsymbol{\Psi}(s)z}] \quad (2.20)$$

donde $\mathbf{Y}_0(s) = \mathbf{Z}(s)^{-1} \boldsymbol{\Psi}(s)$, $\mathbf{Z}_0(s) = \boldsymbol{\Psi}(s)^{-1} \mathbf{Z}(s)$ son las matrices de admitancia e impedancia característica del cable, respectivamente.

2.3 Red de dos puertos.

La representación de una matriz de transferencia permite relacionar las respuestas de voltaje y corriente en el extremo emisor ($z = 0$) con las respuestas en el extremo receptor ($z = \ell$), para lo cual es necesario aplicar las condiciones de frontera (ver Fig. 2.1) a las soluciones de voltaje y corriente descritas por las ecuaciones (2.17) y (2.20) [2], [33], obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_\ell \\ \mathbf{I}_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{I}_0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

donde

$$\mathbf{A} = \cosh(\Psi \ell) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{B} = -\sinh(\Psi \ell) \mathbf{Z}_0 \quad (2.23)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{Y}_0 \sinh(\Psi \ell) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{D} = -\cosh(\Psi \ell) \quad (2.25)$$

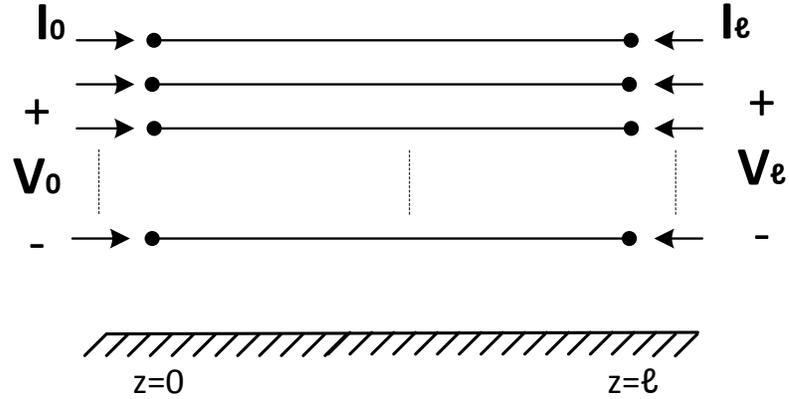


Fig. 2.1. Condiciones de frontera para una línea multiconductora.

A través de manipulaciones matemáticas a la matriz de transferencia, es posible obtener una matriz de admitancias (\mathbf{Y}_{bus}) que relacione las tensiones nodales en los extremos de la línea con las corrientes que se inyectan al sistema, obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_0 \\ \mathbf{I}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{SS} & -\mathbf{Y}_{SR} \\ -\mathbf{Y}_{RS} & \mathbf{Y}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_l \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

donde

$$\mathbf{Y}_{SS} = \mathbf{Y}_{RR} = \mathbf{Y}_0 \coth(\Psi \ell) \quad (2.27)$$

$$\mathbf{Y}_{SR} = \mathbf{Y}_{RS} = \mathbf{Y}_0 \operatorname{csch}(\Psi \ell) \quad (2.28)$$

En la Fig. 2.2 se muestra la representación gráfica de (2.26).

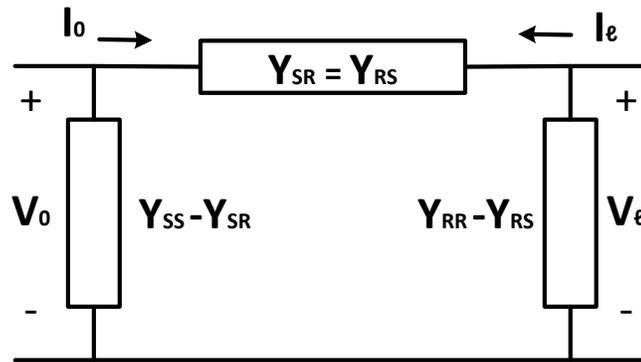


Fig. 2.2. Representación gráfica del modelo de dos puertos (forma nodal).

2.4 Modelado del cable subterráneo.

En cables coaxiales es común determinar los parámetros de la matriz de impedancia serie $\mathbf{Z}(\omega)$ sin acoplamiento entre conductores, así como la matriz de admitancia en derivación a partir de las corrientes de malla que circulan en el cable [19]. Para ilustrar esto de mejor manera, consideremos el caso más sencillo de un cable coaxial constituido por núcleo, blindaje y el suelo como referencia (ver Fig. 2.3).

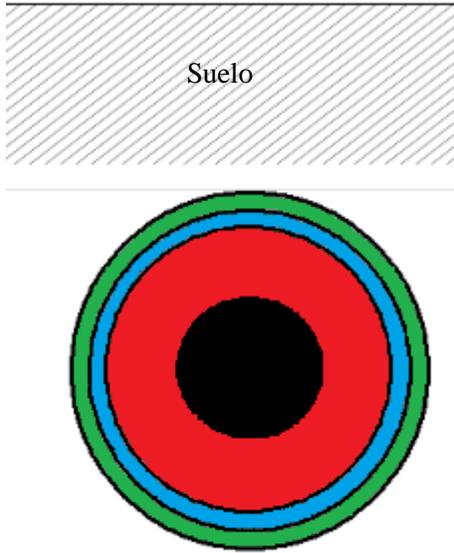


Fig. 2.3. Sección transversal de un cable coaxial.
Negro: Núcleo, Rojo: Aislamiento principal
Azul: Blindaje, Verde: Cubierta

Para el cálculo de la impedancia serie es necesario que una corriente fluya en un elemento conductor y a su vez forme una malla respecto a otro. De esta manera, para la geometría de cable de la Fig. 2.3 se tienen dos mallas: la primera se forma cuando se inyecta una corriente al núcleo y retorna por el blindaje, mientras que en la segunda malla la corriente se inyecta en el blindaje y retorna por el suelo (ver Fig. 2.4); con esto es posible obtener la matriz de impedancia serie en función de impedancias de malla.

Sin embargo, para el análisis de transitorios electromagnéticos se requiere transformar estas impedancias de malla a impedancias de elemento con la finalidad de analizar sobretensiones o sobrecorrientes en los elementos respecto a una referencia, en este caso el suelo. Por lo tanto, relacionando estas impedancias de malla para cada conductor del cable y mediante desarrollos matemáticos es posible expresar las impedancias en función de sus elementos. Un análisis similar se realiza para las admitancias.

Por lo tanto, la matriz de impedancia serie queda definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{Z}(\omega) = \begin{bmatrix} Z_{N,N} & Z_{B,N} \\ Z_{B,N} & Z_{B,B} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

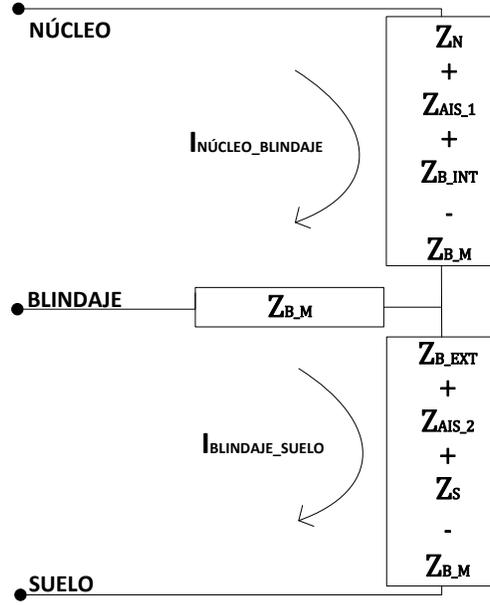


Fig. 2.4. Representación gráfica para determinar la impedancia en un cable coaxial.

donde $Z_{N,N}$, $Z_{B,B}$ y $Z_{B,N}$ son las impedancias propias del núcleo y blindaje e impedancia mutua del núcleo y blindaje, respectivamente, las cuales se obtienen a partir de las siguientes relaciones:

$$Z_{N,N} = Z_N + Z_{AIS_1} + Z_{B_INT} + Z_{B_EXT} + Z_{AIS_2} + Z_S - (2Z_{B_M}) \quad (2.30)$$

$$Z_{B,N} = Z_{B_EXT} + Z_{AIS_2} + Z_S - Z_{B_M} \quad (2.31)$$

$$Z_{B,B} = Z_{B_EXT} + Z_{AIS_2} + Z_S \quad (2.32)$$

Para obtener la matriz de admitancia en derivación se sigue un proceso similar al descrito anteriormente por la matriz de impedancia serie. Sin embargo, en este caso el procedimiento es más sencillo, ya que en principio se supone que los parámetros no dependen de la frecuencia, se desprecian las conductancias en los aislamientos, además de que no se tienen acoplamientos mutuos entre conductores del mismo cable y de cables adyacentes. Al igual que la matriz de impedancia serie se requieren desarrollos matemáticos para expresar estas admitancias en función de sus elementos (véase 2.33), como se describe en el Apéndice A. En la sección 3.3.2 se muestra la corrección que se debe aplicar a la permitividad del aislamiento principal para tomar en cuenta el efecto de las capas semiconductoras [62], con lo que es posible obtener valores más certeros en las capacitancias al tomar en cuenta estos elementos.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & -Y_1 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_2 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

donde Y_1 y Y_2 son las admitancias propias del aislamiento principal y de la cubierta del cable, respectivamente.

2.5 Ecuaciones del campo electromagnético para obtención de los parámetros eléctricos de cables coaxiales.

A continuación se presenta la base de solución que el MEF utiliza para resolver las ecuaciones de campo electromagnético a través del software comercial COMSOL Multiphysics 4.4®.

Inicialmente se plantean las ecuaciones del campo cuasi-estacionario magnético en el dominio de la frecuencia y electrostático al aplicar la teoría de potenciales por los métodos de la impedancia compleja, carga y energía para la obtención de los parámetros de impedancia serie $\mathbf{Z}(\omega)$ y admitancia en derivación \mathbf{Y} . La elección de la formulación de potenciales aplicado a ecuaciones diferenciales es una herramienta matemática que permite reducir la dimensión de un problema para posteriormente, mediante diferenciación, obtener el resultado del problema original [63].

Para la determinación de los parámetros eléctricos se hacen las siguientes consideraciones en la región de solución con el fin de reducir la complejidad del problema:

1. Los cables coaxiales están constituidos por conductores largos e infinitos con sección transversal uniforme, paralelos entre si y al suelo, ignorando los efectos de borde al inicio y final del cable.
2. El sistema es lineal, homogéneo e isotrópico, es decir, las relaciones constitutivas de permitividad relativa ϵ_r , permeabilidad relativa μ_r y conductividad σ son constantes a lo largo de la región de solución.
3. No se tienen corrientes de desplazamiento en los dieléctricos.
4. Solamente se tienen cargas superficiales en conductores del cable y el suelo, lo cual se justifica en [33], ya que cualquier carga dentro de un conductor tiende a dirigirse hacia su superficie con una constante de tiempo ϵ/σ .

Las ecuaciones de la línea de transmisión son las ecuaciones fundamentales en las cuales se basan todos los modelos de análisis transitorio de cables subterráneos [33], [8], [9], mientras que $\mathbf{Z}(\omega)$ y \mathbf{Y} son los datos de entrada de estos modelos, lo cuales pueden ser calculados directamente de los campos cuasi estacionario magnético y electrostático, respectivamente.

Los elementos de la matriz $\mathbf{Z}(\omega)$ dependen de la configuración geométrica, del efecto piel, del efecto de proximidad y de la distribución de la corriente en el suelo, los cuales se pueden determinar a partir de la distribución de campo magnético dentro y alrededor del cable.

2.5.1 Cálculo de la impedancia con el enfoque del Método del Elemento Finito.

Las ecuaciones de continuidad de la corriente y de Ampere-Maxwell en forma diferencial, junto con las definiciones de potencial vectorial magnético y potencial escalar eléctrico, además de las relaciones constitutivas (2.34)-(2.38), son el conjunto de ecuaciones que definen a un campo cuasi estacionario magnético en el dominio de la frecuencia. Estas son las ecuaciones a resolver en la física de campos eléctricos y magnéticos dentro de la interfaz del software comercial COMSOL Multiphysics 4.4® basado en el MEF [64].

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.34)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_{\text{ext}} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - j\omega \mathbf{A} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.38)$$

En (2.37) $-\nabla V$ y $-j\omega \mathbf{A}$ son las componentes de campo eléctrico originado por el gradiente del potencial eléctrico y la componente de campo eléctrico inducido, respectivamente. Sustituyendo (2.37) en (2.36), se tiene las diferentes componentes de corriente:

$$\mathbf{J} = -\sigma \nabla V - j\sigma \omega \mathbf{A} + j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_{\text{ext}} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_{\text{ext}} \quad (2.39)$$

Integrando (2.39) a lo largo de la sección transversal del conductor se obtiene la corriente total que circula por el conductor:

$$\mathbf{I} = \oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.40)$$

Por otro lado, sustituyendo (2.38) en (2.35) y empleando la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2.41)$$

Sustituyendo en (2.39) y considerando $\mathbf{J}_d = 0$ y $\mathbf{J}_{\text{ext}} = 0$

$$-\sigma \nabla V - j\sigma \omega \mathbf{A} = \frac{1}{\mu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2.42)$$

Tomando $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\sigma \nabla V$. Sustituyendo (2.36) en (2.42), se obtiene la ecuación de difusión en 2D, considerando que $\mathbf{J}_d = 0$, se

$$\nabla^2 \mathbf{A} + j\mu \sigma \omega \mathbf{A} = 0 \quad (2.43)$$

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

ecuación que es resuelta con el MEF y de cuya solución es posible calcular $Z(\omega)$, como se muestra enseguida [65].

2.5.1.1 Método de la impedancia compleja.

A partir de la impedancia compleja se obtienen los parámetros de inductancia y resistencia; partiendo de considerar la componente de corriente J_s como:

$$J_s = -\sigma \nabla V = -\sigma \frac{dV}{dz} \mathbf{a}_z \quad (2.44)$$

Y que la caída de potencial en la dirección z en el dominio de la frecuencia se define como

$$-\frac{dV}{dz} = Z(\omega)I \quad (2.45)$$

Despejando $Z(\omega)$ de (2.45):

$$Z(\omega) = -\frac{1}{I} \frac{dV}{dz} \quad (2.46)$$

De la ecuación (2.44) despejando la diferencial de tensión $\frac{dV}{dz}$ y sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene:

$$Z(\omega) = \frac{\|J_s\|}{I\sigma} \quad (2.47)$$

donde I está definida por (2.40).

De (2.47), es posible obtener las pérdidas por efecto Joule y la inductancia total:

$$R(\omega) = \text{real}(Z(\omega)) \quad (2.48)$$

$$L(\omega) = \frac{\text{imag}(Z(\omega))}{\omega} \quad (2.49)$$

Las ecuaciones (2.48) y (2.49) corresponden al caso monofásico, es decir, son los parámetros que se obtienen al excitar un conductor respecto otro o al suelo. Estas mismas ecuaciones se pueden generalizar para el caso multiconductor. Esto se muestra en la ecuación (2.50), donde al excitar cada conductor de fase por separado y determinando las corrientes inducidas en los conductores no excitados [58], se obtienen los elementos de la matriz de impedancia serie.

$$Z_{ij} = \frac{V_i}{I_j} = \frac{J_{s_i}}{I_j \sigma_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.50)$$

La desventaja del método es que no permite conocer las resistencias e inductancias en cada uno de los elementos del cable, como son: núcleo, blindaje, aislamiento principal, cubierta y suelo, ya que estos parámetros están contenidos en la impedancia serie. En ocasiones el

conocimiento aislado de los parámetros de cada elemento permite determinar las velocidades y atenuaciones en cada uno de los modos de propagación de los conductores en el cable y sobre todo el suelo [66], lo cual se resuelve usando el método de la energía que a continuación se describe.

Por otro lado, la ventaja del método de la impedancia compleja es que no requiere conocer las distribuciones de campo para poder calcular $Z(\omega)$ [65].

2.5.1.2 Método de la energía.

Para la obtención de los parámetros de impedancia serie es indispensable el conocimiento de las pérdidas de potencia por efecto Joule, así como la energía magnética almacenada [5]. Previo a ello es fundamental el conocimiento de la distribución de campo magnético dada por la corriente total (2.40). El procedimiento correspondiente se describe a continuación:

Las pérdidas por efecto Joule se determinan de

$$P = \int_v \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} dv \quad (2.51)$$

Sustituyendo (2.51) en la ley de Ohm se tiene:

$$R(\omega) = \frac{\int_v \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} dv}{\|\mathbf{I}\|^2} \quad (2.52)$$

De la definición de energía magnética:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv \quad (2.53)$$

Recordando las consideraciones iniciales que suponen que el medio es lineal, homogéneo e isotrópico, es posible reducir a:

$$W_m = \frac{1}{2} \mu \int_v \mathbf{H}^2 dv \quad (2.54)$$

La energía magnética almacenada en el cable y proximidades se calcula a partir de la expresión (2.54). Por otro lado, de la teoría de circuitos, la energía magnética almacenada en un conductor en función de la inductancia está dada por:

$$W_m = \frac{1}{2} L \|\mathbf{I}\|^2 \quad (2.55)$$

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

La presencia de varios conductores en el medio provoca acoplamientos magnéticos mutuos entre el conductor i y j , por lo que es posible definir energías magnéticas mutuas de la siguiente forma:

$$W_{m_{ij}} = \frac{1}{2}L_i\|\mathbf{I}_i\|^2 + \frac{1}{2}L_j\|\mathbf{I}_j\|^2 \mp M_{ij}\|\mathbf{I}_i\|\|\mathbf{I}_j\| \quad (2.56)$$

Despejando $L(\omega)$ y $M_{ij}(\omega)$ de (2.55) y (2.56), se obtienen las inductancias propias y mutuas, respectivamente:

$$L(\omega) = \frac{2W_m}{\|\mathbf{I}\|^2} \quad (2.57)$$

Para calcular la inductancia mutua es necesario calcular previamente la inductancia propia de los conductores que componen el arreglo. Una vez obtenidos estos valores se calcula la inductancia mutua a partir de la siguiente ecuación:

$$M_{ij} = \frac{W_{m_{ij}} - \frac{1}{2}L_i\|\mathbf{I}_i\|^2 - \frac{1}{2}L_j\|\mathbf{I}_j\|^2}{\|\mathbf{I}_i\|\|\mathbf{I}_j\|} \quad (2.58)$$

2.5.2 Cálculo de la admitancia con el Método del Elemento Finito.

Los elementos de la matriz \mathbf{Y} se determinan a partir del estudio del campo electrostático. En este trabajo se desprecia la conductancia G y se considera únicamente la capacitancia C .

Las ecuaciones de Maxwell que definen un campo electrostático son las siguientes:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.59)$$

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho \quad (2.60)$$

Considerando

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2.61)$$

Sustituyendo (2.61) en (2.60), y considerando que la carga espacial es cero,

$$\nabla \cdot \epsilon(-\nabla V) = 0 \quad (2.62)$$

Se obtiene la Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.63)$$

La ecuación (2.63), en conjunto con las condiciones de frontera del tipo Dirichlet o Neumann, permite determinar los parámetros de la admitancia en derivación \mathbf{Y} .

2.5.2.1 Método de la carga.

La capacitancia se obtiene a partir de la carga en la superficie del conductor cuando se aplica una diferencia de potencial (2.64). Esta carga superficial se obtiene de integrar D a lo largo de la superficie del conductor [65]. Para aplicar este método en la obtención de la capacitancia, se supone conocida la diferencia de potencial entre los conductores. Por lo tanto, basta con determinar la carga en la superficie de uno de ellos para determinar la capacitancia. La carga total se determina con una integral de superficie de la densidad superficial de carga en el conductor. En el caso de una solución analítica, la integral resulta sumamente difícil si la geometría del arreglo es asimétrica.

$$C = \frac{|q|}{|V|} \quad (2.64)$$

donde:

$$q = \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{Es el flujo del campo eléctrico en una superficie cerrada que limita al conductor excitado.}$$

$$V = - \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{Es el potencial aplicado.}$$

En la capacitancia propia la carga se calcula en la superficie del conductor excitado. Ésta debe ser igual y de signo contrario a la carga calculada en todos los demás conductores juntos con la diferencia de potencial conocida.

Para calcular la capacitancia mutua el desarrollo es análogo al caso anterior. La diferencia radica en que la carga se calcula en la superficie del conductor asociado, recordando que el concepto de capacitancia mutua involucra a dos conductores excitando solamente uno de ellos. La diferencia de potencial es conocida, y la carga se calcula en el conductor no excitado:

$$C_{ij} = \frac{|q_m|}{|V|} \quad (2.65)$$

donde:

$$q_m = \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{Es el flujo del campo eléctrico en una superficie cerrada que encierra al conductor asociado al conductor excitado.}$$

$$V = - \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{Es el potencial aplicado.}$$

2.5.2.2 Método de la energía.

De manera similar a la aplicación de este método para el cálculo de la inductancia, para el cálculo de la capacitancia se obtiene la energía eléctrica almacenada en el material dieléctrico:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv \quad (2.66)$$

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

Retomando nuevamente las consideraciones iniciales, suponiendo que el medio es lineal, homogéneo e isotrópico, es posible reducir la complejidad del problema:

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon \int_V \mathbf{E}^2 dv \quad (2.67)$$

La energía eléctrica almacenada en el cable y proximidades se calcula a partir de la expresión. Por otro lado, de la teoría de circuitos, la energía eléctrica almacenada en un par de conductores (que funciona como un capacitor) en función de la capacitancia está dada por:

$$W_e = \frac{1}{2} CV^2 \quad (2.68)$$

Despejando C de (2.68), se obtiene la capacitancia propia:

$$C = \frac{2|W_e|}{|V|^2} \quad (2.69)$$

donde:

$$W_e = \int_V \rho_e dV \quad \text{Es la energía eléctrica en el aislamiento debida a un conductor excitado.}$$

$$\rho_e \quad \text{Es la densidad de energía eléctrica.}$$

$$V = - \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{Es la diferencia de potencial.}$$

La capacitancia propia se calcula mediante la excitación de un conductor, mientras que el resto de los conductores son aterrizados. Se entenderá por capacitancia mutua como una propiedad de un arreglo de más de dos conductores y un medio aislante entre ellos [5].

Para calcular la capacitancia mutua es necesario calcular previamente la capacitancia propia de los conductores que componen el arreglo. Una vez obtenidos estos valores se calcula la capacitancia mutua a partir de la siguiente ecuación:

$$W_{e_{ij}} = C_{ij}V_iV_j + \frac{1}{2}((C_iV_i^2) + (C_jV_j^2)) \quad (2.70)$$

Despejando C_{ij} de (2.70) se obtiene:

$$C_{ij} = \frac{W_{e_{ij}} - \frac{1}{2}((C_iV_i^2) + (C_jV_j^2))}{V_iV_j} \quad (2.71)$$

donde:

$$W_{e_{ij}} = \int_V \rho_e dV \quad \text{Es la energía eléctrica en el aislamiento debida a un conductor excitado.}$$

$$\rho_e \quad \text{Es la densidad de energía eléctrica.}$$

$$V = - \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{Es la diferencia de potencial.}$$

CAPÍTULO 3. Cálculo de parámetros eléctricos de cables subterráneos utilizando el MEF.

3.1 Introducción.

En este capítulo se describe una metodología sencilla para la determinación de los parámetros de cables mediante el MEF. Considerando campos cuasi estacionarios magnéticos y electrostáticos, y con los métodos descritos en el capítulo anterior, se calculan los parámetros eléctricos dependientes de la frecuencia: resistencia $R(\omega)$ e inductancia $L(\omega)$, así como de capacitancia C de un cable subterráneo como el que se presentó en la Fig. 2.3.

Adicionalmente, se proporcionan algunas recomendaciones para la simulación correcta de campos cuasi estacionarios magnéticos en la obtención de la impedancia serie dependiente de la frecuencia $Z(\omega)$, en particular en lo referente a las condiciones iniciales y de frontera que deben ser usadas en campos magnéticos y eléctricos. Por otro lado, la simulación de campos electrostáticos resulta menos compleja, ya que la capacitancia C no se considera función de la frecuencia.

La frontera de conductor magnéticamente perfecto no permite que el campo magnético penetre hacia elementos conductores vecinos, por lo que en un inicio se utiliza esta condición para su comparación con los parámetros calculados de fórmulas analíticas. De esta manera es posible despreciar el efecto de proximidad, tal como lo hacen las aproximaciones utilizadas en otros trabajos. Sin embargo, en realidad este efecto de proximidad puede ser significativo, por lo que más adelante se muestra el impacto de ello sobre los parámetros $R(\omega)$ y $L(\omega)$.

A lo largo de las simulaciones se ha verificado que el excitar los conductores por medio de una densidad de corriente externa a través de potenciales (véase ecuación 2.44) es la mejor elección para la obtención de los parámetros de impedancia serie $Z(\omega)$, en comparación con una excitación por corrientes, debido a que en esta última es complicado obtener una distribución real de las corrientes en el suelo a medida que se incrementa la frecuencia.

Una fase medular para la solución adecuada del campo cuasi estacionario magnético recae en el mallado. Ya que las simulaciones incluyen un barrido de frecuencia y elementos con muy diferentes propiedades eléctricas (suelo y conductores), el tamaño máximo de los elementos debe ser seleccionado adecuadamente en cada subdominio de acuerdo a la máxima profundidad de penetración.

Idealmente, la condición de elemento infinito (para aproximar la frontera abierta) en conjunto con la frontera de aislamiento magnético ($\mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0$), se podrían emplear para delimitar el dominio de solución. Sin embargo, no es posible aplicar esta condición a medios con diferentes propiedades electromagnéticas, específicamente con diferentes valores de σ , por lo que un método alternativo de aproximación es que las dimensiones de la región de solución sean función de la máxima profundidad de penetración (δ_{\max}) a la frecuencia

mínima (f_{\min}). En este trabajo $f_{\min} = 60$ Hz; para esta frecuencia $\delta_{\max} = 290.5$ m, por lo que esta longitud es el valor menor que puede ser empleado para dimensionar el dominio del suelo y así obtener una mejor distribución de las corrientes de retorno por tierra. En este caso se empleó la condición de frontera de campo magnético con un valor de $H_0 = 0$ [A/m], para aproximar la continuidad del flujo magnético hacia el infinito; $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_0$.

Las pérdidas se presentan comúnmente en valores de potencia y representan pérdidas de energía por diversos fenómenos físicos. Sin embargo, en este trabajo las pérdidas se refieren únicamente a las llamadas pérdidas en el conductor, que son debidas al efecto Joule y, para el caso de corriente alterna, incluyen el efecto piel y el efecto de proximidad [63]. Ambos fenómenos son responsables de modificar la distribución real de la corriente sobre el conductor, incrementar las pérdidas y modificar las inductancias en conductores al inducir corrientes parásitas conocidas como corrientes de eddy [65]. Estas pérdidas dependen básicamente del material y de la sección transversal de los conductores en el cable y el suelo.

Como se mencionó anteriormente, un buen refinamiento del mallado es fundamental para representar de mejor manera el efecto piel, en el cual la corriente tiende a concentrarse en una capa delgada cerca de la superficie de los conductores a medida que se incrementa la frecuencia. Por lo tanto, se debe prestar especial atención al valor de δ a medida que se incrementa la frecuencia para evitar resultados erróneos.

3.2 Cálculo de los parámetros eléctricos dependientes de la frecuencia: resistencia $R(\omega)$ e inductancia $L(\omega)$, usando el programa COMSOL Multiphysics 4.4®.

Las pérdidas e inductancias se obtienen en COMSOL Multiphysics 4.4® a partir del método de la energía (P y W_m) y el método de la impedancia compleja (Z_{com}) para un barrido de frecuencias de 60 Hz a 1 MHz. Los resultados se comparan con los obtenidos de las aproximaciones analíticas [33], [21] implementadas en Matlab® (véase Apéndice A).

3.2.1 Modelo del cable.

Considerando la simetría a lo largo del eje del cable, el cálculo de parámetros se realizó en dos dimensiones, por lo que los valores obtenidos son por unidad de longitud (por metro en este trabajo). La Fig. 3.1 muestra la geometría considerada y sus dimensiones.

La simulación de campos electromagnéticos requiere resolver las ecuaciones de Maxwell bajo las condiciones de frontera establecidas previamente. El módulo AC/DC nos permite realizar esta tarea.

Tomando en cuenta la dependencia frecuencial de los parámetros $R(\omega)$ y $L(\omega)$, así como la necesidad de un barrido paramétrico para un intervalo de frecuencias de 60 Hz a 1 MHz, el estudio se debe realizar directamente en el dominio de la frecuencia.

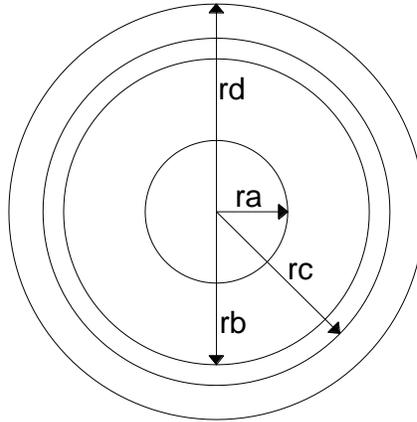


Fig. 3.1. Sección transversal del cable con sus dimensiones.
 r_a : 0.0127 m, r_b : 0.0282 m, r_c : 0.0293 m, r_d : 0.0345 m

donde:

- r_a : es el radio del núcleo.
- r_b : es el radio del aislamiento principal.
- r_c : es el radio del blindaje.
- r_d : es el radio de la cubierta.

Deben asignarse los materiales correspondientes a los diferentes subdominios del cable coaxial, el suelo y el aire especificando sus propiedades constitutivas: conductividad eléctrica σ , permitividad relativa ϵ_r y permeabilidad relativa μ_r . Los valores empleados para el caso de estudio se muestran en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Definición de los materiales.

Parámetro constitutivo del material	Materiales					
	Conductores			Aislamientos		
	Cobre	Plomo	Suelo	Aire	XLPE	PVC
$\sigma \left[\frac{S}{m} \right]$	5.80X10 ⁷	7.25X10 ⁶	0.05	0	0	0
ϵ_r	1	1	1	1	3.5	3.3
μ_r	1	1	1	1	1	1

La física de campos magnéticos y eléctricos se utiliza en COMSOL para calcular el valor del campo magnético y a su vez la distribución de la corriente cuando J_s se origina a partir de una tensión aplicada, estableciendo previamente las condiciones iniciales y de frontera que requiere el método numérico para resolver el problema.

Los conductores se excitan aplicando una densidad de corriente externa en el núcleo y blindaje del cable, respectivamente. Ambas condiciones establecen el valor de la corriente que fluirá por la trayectoria cerrada que forman estos subdominios. Posteriormente se

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

excitan los conductores que forman la siguiente malla aplicando una densidad de corriente externa entre los subdominios del blindaje y del suelo.

El mallado es una de las etapas fundamentales en la simulación, ya que en gran medida los resultados dependerán del número de elementos empleados. Sin embargo, un gran refinamiento del mallado es ineficiente desde el punto de vista computacional debido al tiempo empleado en la resolución del problema. Por lo tanto, es importante buscar un equilibrio entre exactitud y tiempo de solución.

En regiones donde se tiene una gran variación de las cantidades electromagnéticas, como es el caso de corrientes y densidades de flujo, se requiere un refinamiento del mallado, donde el tamaño del elemento debe elegirse de acuerdo a la profundidad de penetración o, en otras palabras, a la frecuencia a la cual se está simulando.

En este caso, la δ_{\min} está en función de la f_{\max} que es de 1 MHz, teniendo para cada uno de los materiales conductores (ver Figs. 3.2 y 3.3) lo siguiente:

$$\delta_{\min} = \sqrt{\frac{1}{j\omega\mu\sigma}}$$

$$\delta_{\min_núcleo} = 6.608 \times 10^{-5} \text{ m}; \quad \delta_{\min_blindaje} = 1.87 \times 10^{-4} \text{ m}; \quad \delta_{\min_suelo} = 2.25 \text{ m}$$

De esta manera, las fronteras de los conductores son divididas en capas de $\frac{\delta_{\min}}{5}$ de espesor. Por lo tanto, es necesario añadir subdivisiones de mallado que requieren un refinamiento en cada uno de los dominios, en donde a cada una de estas subdivisiones se le agregan elementos triangulares y tamaños de elemento con dimensiones de acuerdo a la Tabla 3.2, de tal forma que sea posible simular correctamente el campo cuasi estacionario magnético para el cálculo de parámetros $R(\omega)$ y $L(\omega)$.

Tabla 3.2. Tamaño de elemento en los dominios.

Dominio	Tamaño de Elemento δ_{\min}
Núcleo	0.0132 m
Blindaje	0.0132 m
Asilamiento Principal	Tamaño de elemento fino (predefinido)
Cubierta	Tamaño de elemento fino (predefinido)
Aire	Tamaño de elemento fino (predefinido)
Suelo 1	0.5 m
Suelo 2	1.5 m
Suelo 3	4.5 m
Suelo 4	14.5 m
Suelo 5	60.0 m

Para reducir el número de elementos en el dominio del suelo y por ende el esfuerzo computacional empleado en el mallado y en la solución de los campos magnéticos, el suelo es dividido en varias capas proporcionales a la δ a cada una de las frecuencias de 60Hz, 1 kHz, 10 kHz, 100 KHz y 1 MHz, como se ilustra en la Tabla 3.2 y en la Fig. 3.3.

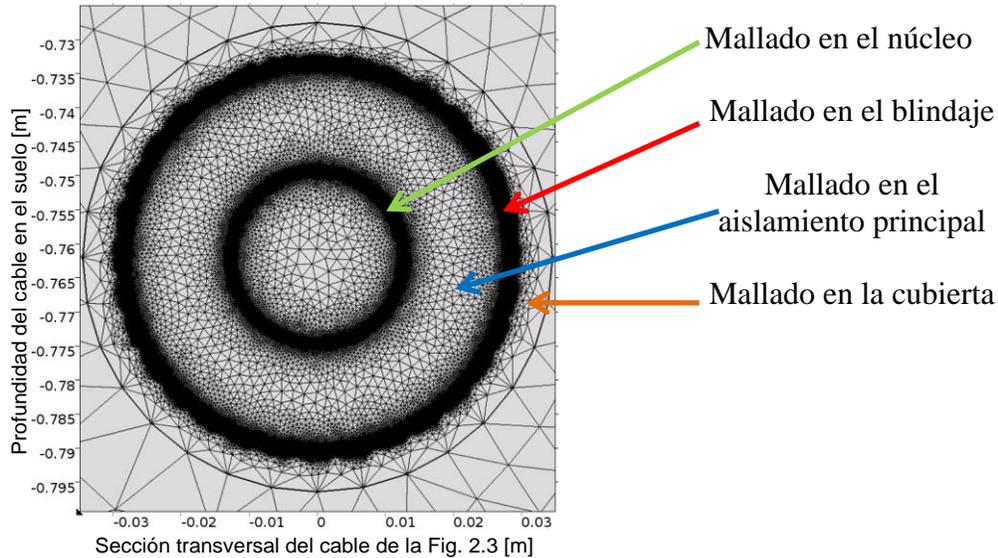


Fig. 3.2. Mallado en el cable coaxial.

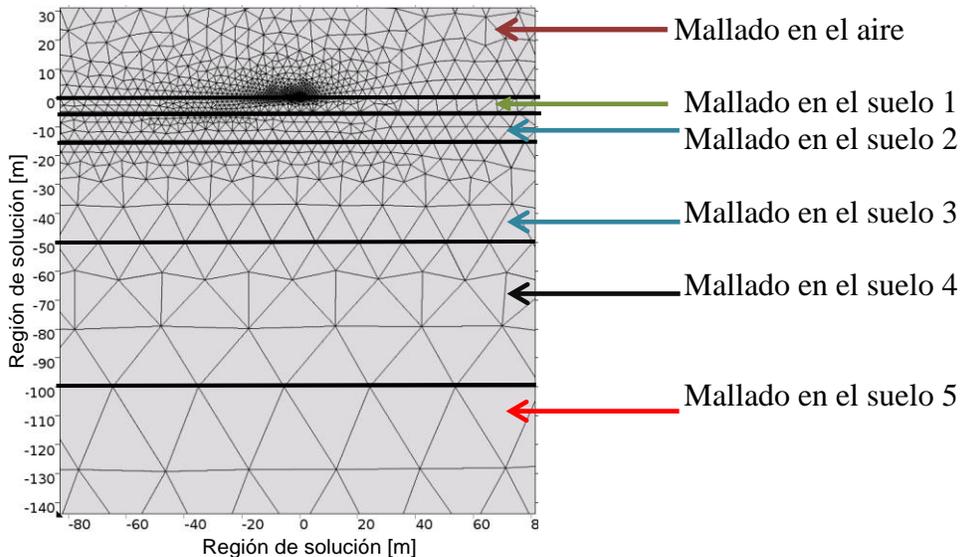


Fig. 3.3. Mallado general en los dominios en la simulación.

Finalmente, lo siguiente es iniciar la simulación para el barrido paramétrico de frecuencias de 60 Hz a 1 MHz.

Una vez calculada la potencia activa, energía magnética y corrientes en los dominios, es posible obtener las pérdidas $R(\omega)$ e inductancias $L(\omega)$ por los métodos descritos en el capítulo anterior, estos resultados se comparan con las formulaciones analíticas desarrolladas por Wedepohl/Wilcox [33] y Schelkunoff [21]. La diferencia relativa se calcula tomando como base las fórmulas analíticas, de acuerdo con:

$$e_r(\%) = \frac{|Z_{mef}| - |Z_{fórmula}|}{|Z_{fórmula}|} \quad (3.1)$$

A continuación se calculan las impedancias ($R(\omega)$ y $L(\omega)$) en los conductores cilíndricos y la de retorno por tierra por el método de la energía (W_m y P), así como las impedancias propias que conforman los lazos 1 y 2 e impedancia mutua del blindaje por el método de la impedancia compleja (Z_{com}).

Método de la energía

En la sección 2.5.1.2 se explicó el método de la energía para el cálculo de la impedancia serie aplicando el MEF. En esta tesis, este método se emplea para calcular las impedancias propias de cada uno de los conductores y el suelo, así como la impedancia mutua del blindaje (Z_{B_M}) que no es posible calcular con el método de la impedancia compleja (Z_{com}).

El método suele ser útil para obtener las velocidades y atenuaciones de cada uno de los modos de propagación de los conductores en el cable y el suelo [66], sin embargo, la desventaja es el esfuerzo computacional para determinar los parámetros ya que previamente requiere del conocimiento de las distribuciones de campo magnético en la región de solución.

A. Núcleo:

Para la inductancia y las pérdidas se crean las variables $Lind_1$ y $Rcore$, en donde los parámetros se calculan de la siguiente manera:

$$Lind_1 = \frac{4 * Wm_1}{abs(Icurr_1)^2} \quad (3.2)$$

$$Rcore = \frac{2 * Pcore}{abs(Icurr_1)^2} \quad (3.3)$$

B. Aislamiento Principal:

Para la inductancia se crea la variable $Lind_2$ y no se consideran pérdidas en el aislamiento, donde el parámetro de inductancia se calcula de la siguiente manera:

$$Lind_2 = \frac{4 * Wm_2}{abs(Icurr_1)^2}. \quad (3.4)$$

C. Blindaje:

Para la inductancia y las pérdidas se crean las variables $Lind_3$, $Rsheath_1$ y $Rsheath_2$, en donde los parámetros se calculan de la siguiente manera:

$$Lind_3 = \frac{4*Wm_3}{abs(Icurr_2)^2} \quad (3.5)$$

$$Rsheath_1 = \frac{2*Psheath}{abs(Icurr_1)^2} \quad (3.6)$$

$$Rsheath_2 = \frac{2*Psheath}{abs(Icurr_3)^2} \quad (3.7)$$

D. Cubierta:

Para la inductancia se crea la variable $Lind_4$ y no se consideran pérdidas en la cubierta, donde el parámetro de inductancia se calcula de la siguiente manera:

$$Lind_4 = \frac{4*Wm_4}{abs(Icurr_3)^2} \quad (3.8)$$

E. Suelo y Aire:

Para la inductancia y las pérdidas se crean las variables $Lind_5$ y $Rsoil$, en donde los parámetros se calculan de la siguiente manera:

$$Lind_5 = \frac{4*Wm_5}{abs(Icurr_3)^2} \quad (3.9)$$

$$Rsoil = \frac{2*Psoil}{abs(Icurr_3)^2} \quad (3.10)$$

Método de la Impedancia Compleja $Z(\omega)$

En la Sección 2.4 se mencionó que en cables coaxiales es común obtener los parámetros de impedancia serie $Z(\omega)$ sin acoplamiento entre conductores a partir de corrientes de malla. De esta manera, para un cable coaxial como el mostrado en la Fig. 2.3 es posible obtener estos parámetros en función de las impedancias de malla (véase Fig. 2.4), para después expresarlas en función de sus elementos mediante transformaciones matemáticas. A este método se le designa como método de la impedancia compleja a lo largo de este trabajo.

Enseguida se describe el proceso de cálculo de las impedancias mediante la fórmula descrita en la ecuación (2.44) para cada una de las mallas (véase Fig. 2.4). Tres simulaciones son suficientes para obtener la matriz de impedancia serie generalizada.

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

A. Impedancia serie de la primer malla ($Z_N + Z_{AIS_1} + Z_{B_INT}$).

Se calcula la impedancia serie que se divide en la impedancia del núcleo (Z_N), la impedancia del aislamiento principal (Z_{AIS_1}) y la impedancia interior del blindaje (Z_{B_INT}), al fluir una corriente por el núcleo estableciendo una trayectoria cerrada cuando retorna por el blindaje.

Se crean las variables $Z1_{core}$ y $Z1_{sheath}$, de acuerdo con lo siguiente:

$$Z1_{core} = \frac{V_{ap}}{(I_{curr1}) * (2 * pi * ra)} \quad (3.11)$$

$$Z1_{sheath} = \frac{V_{ap}}{(I_{curr1}) * ((2 * pi * rc) - (2 * pi * rb))} \quad (3.12)$$

Al sumar ambas variables se obtiene la impedancia de la primera malla, esto es,

$$Zloop1_{self} = Z1_{core} + Z1_{sheath} \quad (3.13)$$

Finalmente, aplicando (2.48) y (2.49) a (3.13) es posible obtener $R(\omega)$ y $L(\omega)$:

$$Rloop1_{self} = \text{real}(Zloop1_{self}) \quad (3.14)$$

$$Lloop1_{self} = \frac{\text{imag}(Zloop1_{self})}{2 * pi * f} \quad (3.15)$$

B. Impedancia serie de la segunda malla ($Z_{B_EXT} + Z_{AIS_2} + Z_S$).

Se calcula la impedancia serie que se divide en la impedancia exterior del blindaje (Z_{B_EXT}), la impedancia de la cubierta (Z_{AIS_1}) y la impedancia del suelo (Z_S), al fluir una corriente por el blindaje estableciendo una trayectoria cerrada cuando retorna por el suelo.

Se crean las variables $Z2_{sheath}$ y $Z2_{soil}$ de acuerdo con lo siguiente:

$$Z2_{sheath} = \frac{V_{ap}}{(I_{curr3}) * ((2 * pi * rc) - (2 * pi * rb))} \quad (3.16)$$

$$Z2_{soil} = \frac{V_{ap}}{(I_{curr3}) * \left(\frac{(2 * pi * rlinea)}{2} - (2 * pi * rd) \right)} \quad (3.17)$$

Al sumar ambas variables se obtiene la impedancia de la segunda malla, esto es,

$$Zloop2_{self} = Z2_{sheath} + Z2_{soil} \quad (3.18)$$

Finalmente, aplicando (2.48) y (2.49) a $Zloop2_{self}$ es posible obtener $R(\omega)$ y $L(\omega)$.

$$R_{loop2_self} = \text{real}(Z_{loop2_self}) \quad (3.19)$$

$$L_{loop2_self} = \frac{\text{imag}(Z_{loop2_self})}{2 * \pi * f} \quad (3.20)$$

C. Impedancia Mutua del Blindaje (Z_{B_M}).

Una de las limitantes del método de la impedancia compleja (Z_{com}) es que no es posible obtener directamente la impedancia mutua del blindaje. Una alternativa es utilizar el método de la energía para calcular la inductancia mutua M_{ij} , la cual se obtiene de la ecuación (2.56). La resistencia mutua R_{ij} se desprecia.

Para la aplicación del método de la energía es necesario conocer las energías magnéticas propias en las caras interna y externa del blindaje $W_{m_{ii}}$, $W_{m_{jj}}$ cuando las corrientes circulan en sus respectivas trayectorias, así como la energía magnética mutua $W_{m_{ij}}$ cuando las corrientes fluyen al mismo tiempo en ambas trayectorias.

En las Figs. 3.4 y 3.5 se presenta el efecto piel en el núcleo del cable y la distribución real de la densidad de corriente en el suelo alrededor del cable, respectivamente. En la Figs. 3.6 se muestra la misma densidad de corriente en el suelo que en la Fig. 3.5 pero vista en toda la región de solución. Este efecto puede ser definido como la superposición dentro del conductor de la corriente nominal de carga y las corrientes inducidas por la variación del campo magnético en el medio, conocidas como “corrientes de eddy” [55].

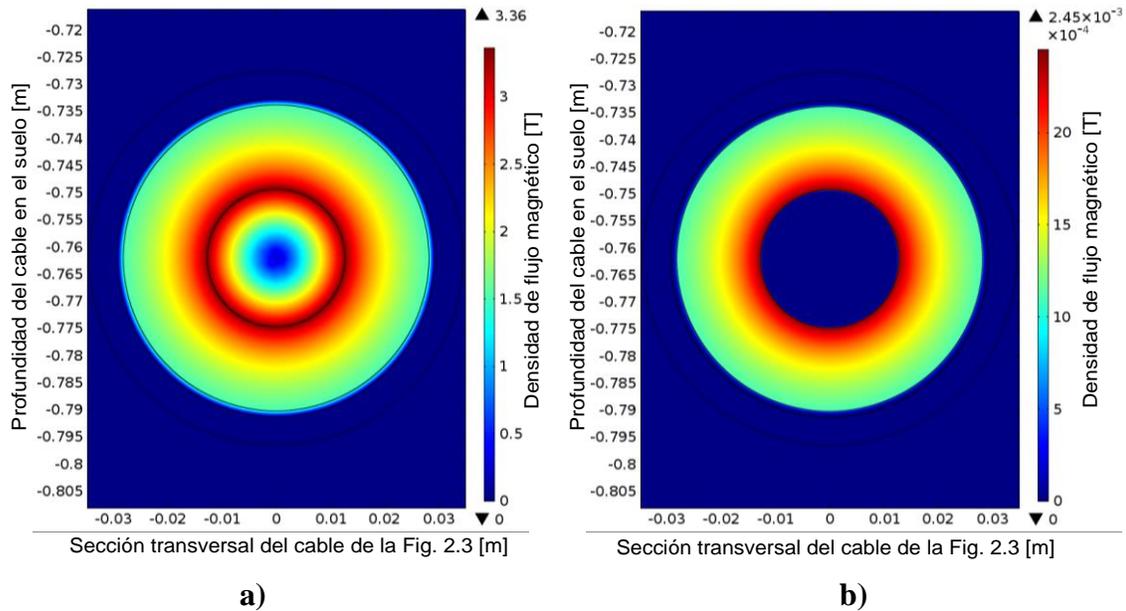


Fig. 3.4. Efecto piel en conductor del núcleo de Cu, a) Densidad de flujo magnético a 60 Hz, b) Densidad de flujo magnético a 1 MHz.

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

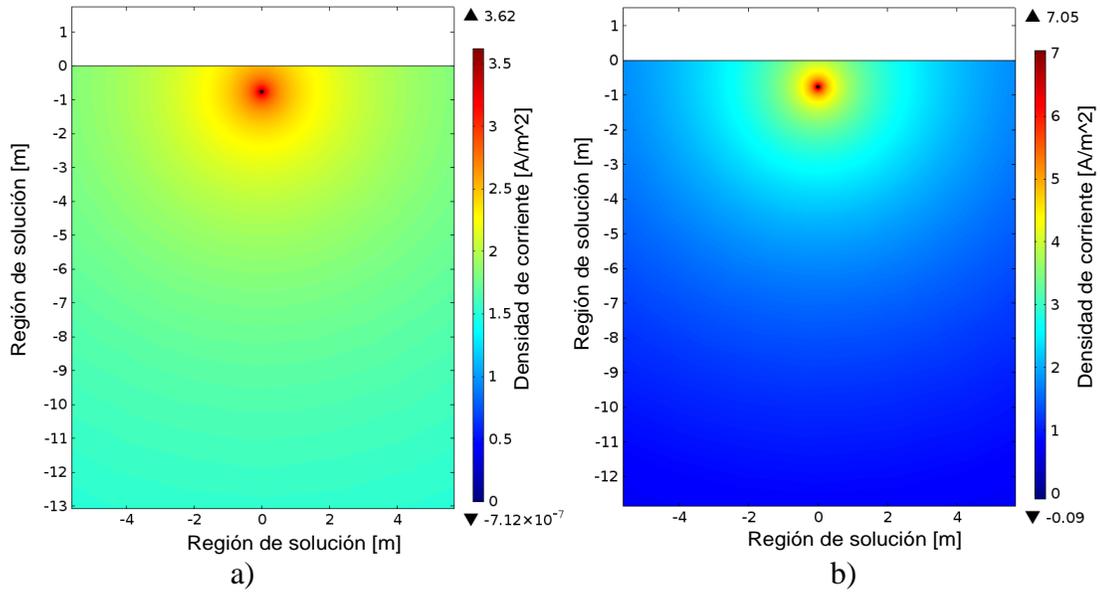


Fig. 3.5. Distribución de la densidad de corriente en el suelo alrededor del cable, a) 60 Hz, b) 10 kHz.

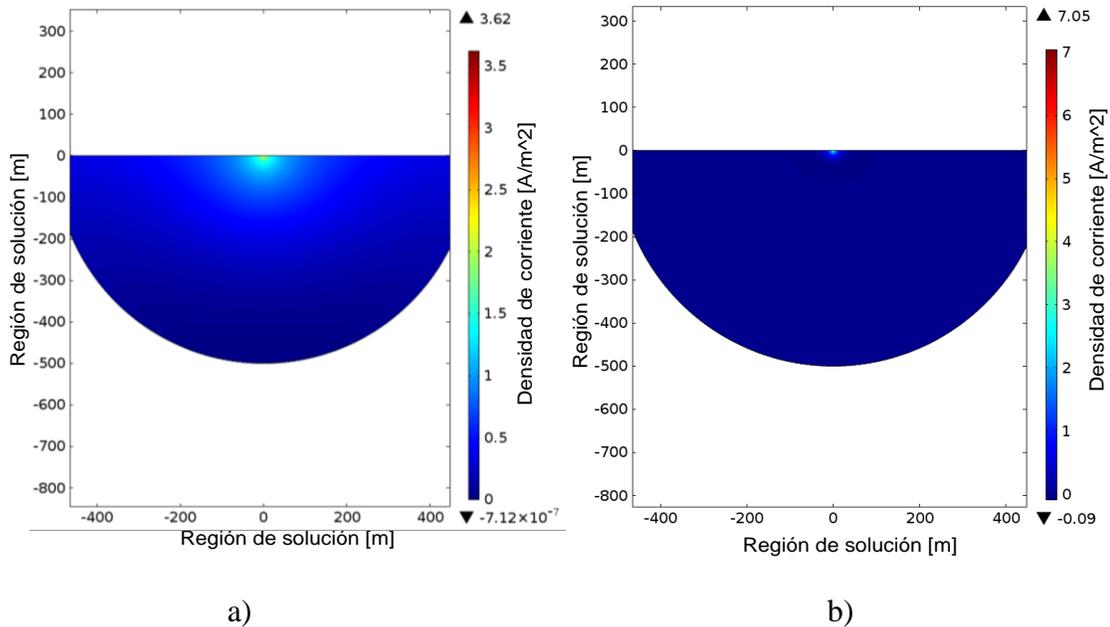


Fig. 3.6. Distribución de la densidad de corriente en el suelo en la región de solución, a) 60 Hz, b) 10 kHz.

3.2.2 Resultados.

En las Tablas 3.3-3.9 se muestran los resultados del cálculo de los parámetros $R(\omega)$ y $L(\omega)$ en cada uno de los elementos del cable y el suelo mediante el método de la energía (P y W_m), utilizando el MEF y las fórmulas analíticas de Schelkunoff. También se muestran las diferencias relativas correspondientes.

Tabla 3.3. Resistencia e inductancia en el núcleo, método de la energía (P y W_m).

Parámetro	f [kHz]	MEF P, W_m	Fórmula Analítica Wedepohl [33]	Fórmula Analítica Schelkunoff [21]	Diferencia Relativa* [%]
Resistencia [Ω/m]	0.06	3.72E-05	3.68E-05	3.72E-05	0.00008
	1	1.12E-04	1.14E-04	1.12E-04	0.00020
	10	3.36E-04	3.38E-04	3.36E-04	0.00005
	100	1.04E-03	1.04E-03	1.04E-03	0.23619
	1000	3.28E-03	3.28E-03	3.28E-03	0.06116
Inductancia [H/m]	0.06	4.77E-08	4.72E-08	4.77E-08	0.00005
	1	1.64E-08	1.64E-08	1.64E-08	0.00028
	10	5.20E-09	5.20E-09	5.20E-09	0.00021
	100	1.65E-09	1.65E-09	1.65E-09	0.00025
	1000	5.20E-10	5.20E-10	5.20E-10	0.00074

*Esta diferencia corresponde al MEF respecto a la Fórmula Analítica de Schelkunoff.

Tabla 3.4. Inductancia en el aislamiento principal, método de la energía (W_m).

Parámetro	f [kHz]	MEF W_m	Fórmula Analítica	Diferencia Relativa [%]
Inductancia [H/m]	0.06	1.60E-07	1.60E-07	0.000002
	1	1.60E-07	1.60E-07	0.000002
	10	1.60E-07	1.60E-07	0.000002
	100	1.60E-07	1.60E-07	0.000002
	1000	1.60E-07	1.60E-07	0.000002

Tabla 3.5. Resistencia e inductancia en el blindaje interior, método de la energía (P y W_m).

Parámetro	f [kHz]	MEF P, W_m	Fórmula Analítica Wedepohl [33]	Fórmula Analítica Schelkunoff [21]	Diferencia Relativa* [%]
Resistencia [Ω/m]	0.06	6.94E-04	6.94E-04	6.94E-04	0.00006
	1	6.95E-04	6.95E-04	6.95E-04	0.00005
	10	7.02E-04	7.02E-04	7.02E-04	0.00003
	100	1.22E-03	1.22E-03	1.22E-03	0.21693
	1000	4.15E-03	4.15E-03	4.15E-03	0.04692
Inductancia [H/m]	0.06	2.60E-09	2.60E-09	2.60E-09	0.00007
	1	2.60E-09	2.60E-09	2.60E-09	0.00002
	10	2.59E-09	2.59E-09	2.59E-09	0.00013
	100	2.07E-09	2.07E-09	2.07E-09	0.00015
	1000	6.63E-10	6.63E-10	6.63E-10	0.00190

*Esta diferencia corresponde al MEF respecto a la Fórmula Analítica de Schelkunoff.

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

Tabla 3.6. Resistencia e inductancia en el blindaje exterior, método de la energía (P y W_m).

Parámetro	f [kHz]	MEF P, W_m	Fórmula Analítica Wedepohl [33]	Fórmula Analítica Schelkunoff [21]	Diferencia Relativa* [%]
Resistencia [Ω/m]	0.06	6.94E-04	6.94E-04	6.94E-04	0.00008
	1	6.95E-04	6.95E-04	6.95E-04	0.00127
	10	7.01E-04	7.02E-04	7.02E-04	0.03908
	100	1.18E-03	1.20E-03	1.20E-03	1.50220
	1000	3.99E-03	4.02E-03	4.02E-03	0.80582
Inductancia [H/m]	0.06	2.50E-09	2.50E-09	2.50E-09	0.00004
	1	2.50E-09	2.50E-09	2.50E-09	0.00020
	10	2.49E-09	2.50E-09	2.49E-09	0.00020
	100	1.99E-09	1.99E-09	1.99E-09	0.00125
	1000	6.38E-10	6.38E-10	6.38E-10	0.00377

*Esta diferencia corresponde al MEF respecto a la Fórmula Analítica de Schelkunoff.

Tabla 3.7. Inductancia en la cubierta, método de la energía (W_m).

Parámetro	f [kHz]	MEF W_m	Fórmula Analítica	Diferencia Relativa [%]
Inductancia [H/m]	0.06	3.27E-08	3.27E-08	0.00012
	1	3.27E-08	3.27E-08	0.00141
	10	3.27E-08	3.27E-08	0.03907
	100	3.22E-08	3.27E-08	1.46845
	1000	3.24E-08	3.27E-08	0.72214

Tabla 3.8. Resistencia e inductancia en suelo, método de la energía (P y W_m).

Parámetro	f [kHz]	MEF P, W_m	Fórmula Analítica Carson [23]	Fórmula Analítica Saad <i>et al.</i> [49]	Diferencia Relativa* [%]	Diferencia Relativa** [%]
Resistencia [Ω/m]	0.06	7.84E-05	5.95E-05	5.94E-05	24.12011	24.20552
	1	1.03E-03	1.00E-03	1.00E-03	2.43707	2.90033
	10	1.04E-02	1.04E-02	1.03E-02	0.54765	1.09075
	100	1.09E-01	1.17E-01	1.09E-01	6.68052	0.12356
	1000	1.17	1.55	1.19	33.23868	1.69699
Inductancia [H/m]	0.06	1.83E-06	2.09E-06	1.86E-06	13.81085	1.52689
	1	1.58E-06	1.80E-06	1.58E-06	14.28600	0.04512
	10	1.34E-06	1.57E-06	1.34E-06	16.84213	0.20091
	100	1.08E-06	1.32E-06	1.10E-06	22.18767	1.96285
	1000	8.16E-07	1.02E-06	8.29E-07	25.48439	1.54555

* Esta diferencia corresponde al MEF respecto a la Fórmula Analítica de Carson.

** Esta diferencia corresponde al MEF respecto a la Fórmula Analítica de Saad *et al.*

Tabla 3.9. Resistencia e inductancia mutua del blindaje, método de la energía (**P** y **W_m**).

Parámetro	f [kHz]	MEF W_m	Fórmula Analítica Wedepohl [33]	Fórmula Analítica Schelkunoff [21]	Diferencia Relativa* [%]
Resistencia [Ω/m]	0.06	-	6.94E-04	6.94E-04	-
	1	-	6.94E-04	6.94E-04	-
	10	-	6.88E-04	6.88E-04	-
	100	-	2.71E-04	2.71E-04	-
	1000	-	1.21E-05	1.21E-05	-
Inductancia [H/m]	0.06	-1.28E-09	-1.28E+07	-1.28E-09	0.35614
	1	-1.70E-09	-1.28E-09	-1.28E-09	24.87442
	10	-1.28E-09	-1.27E-09	-1.27E-09	0.87074
	100	-7.62E-10	-7.75E-10	-7.75E-10	1.67897
	1000	4.72E-12	4.75E-12	4.75E-12	0.59171

*Esta diferencia corresponde al MEF respecto a la Fórmula Analítica de Schelkunoff.

Las diferencias relativas son menores al 2% para los elementos conductores del cable, mientras que en el suelo se tiene una mayor diferencia, la cual se debe principalmente a que las fórmulas analíticas (Carson y Saad *et al.*) no suelen ser exactas para todo el intervalo de frecuencias, con diferencias notables a frecuencias menores a 1 MHz, esto se debe principalmente a que estas formulaciones analíticas fueron desarrolladas para transitorios de alta frecuencia, lo cual se explica con más detalle en el Capítulo 5 “Recomendaciones y Conclusiones”.

Una vez calculados $R(\omega)$ y $L(\omega)$ con el método de la energía W_m , el siguiente paso es agrupar estos parámetros para formar las impedancias de malla (véase Fig. 2.4). Un método alternativo es el método de la impedancia compleja Z_{com} , por medio del cual es posible obtener directamente las impedancias de malla y requiere solamente de tres simulaciones para formar la matriz de impedancia serie generalizada $Z(\omega)$ (véase 2.29).

En la Tabla 3.10 se presentan las diferencias relativas de ambos métodos. En la malla 1 la diferencia no es superior al 0.3% y 0.001% para pérdidas e inductancias, respectivamente, mientras que en la malla 2 no es mayor al 5.5% en pérdidas y 1% en inductancias. Estos resultados indican que la elección de uno u otro método no influyen en el cálculo de los parámetros. Sin embargo, el método de la impedancia compleja es más sencillo, ya que los parámetros en las impedancias de malla se obtienen de manera directa. Esta es la razón principal por la que en adelante este método será la solución base para las comparaciones respecto a fórmulas analíticas.

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

Tabla 3.10. Resistencia e inductancia propias en la malla 1 y malla 2, respectivamente.

Parámetro	Malla 1				Malla 2			
	f [kHz]	MEF W_m	MEF Z_{com}	Diferencia Relativa [%]	f [kHz]	MEF W_m	MEF Z_{com}	Diferencia Relativa [%]
Resistencia [Ω/m]	0.06	7.32E-04	7.32E-04	0.00001	0.06	7.73E-04	7.73E-04	-0.00004%
	1	8.07E-04	8.07E-04	0.00000	1	1.72E-03	1.72E-03	0.26500%
	10	1.04E-03	1.04E-03	-0.22904	10	1.11E-02	1.11E-02	0.10337%
	100	2.26E-03	2.26E-03	0.00000	100	1.11E-01	1.05E-01	5.38814%
	1000	7.43E-03	7.43E-03	0.00000	1000	1.17E+00	1.13E+00	3.32356%
Inductancia [H/m]	0.06	2.10E-07	2.10E-07	0.00023	0.06	1.87E-06	1.87E-06	-0.00017%
	1	1.79E-07	1.79E-07	0.00023	1	1.61E-06	1.61E-06	-0.00085%
	10	1.67E-07	1.67E-07	-0.00003	10	1.38E-06	1.38E-06	-0.02133%
	100	1.63E-07	1.63E-07	0.00015	100	1.11E-06	1.12E-06	-0.84823%
	1000	1.61E-07	1.61E-07	0.00021	1000	8.50E-07	8.52E-07	-0.33315%

Cabe mencionar que hasta ahora el cálculo de parámetros por cualquiera de los métodos numéricos citados anteriormente supone que el campo magnético se confina en la trayectoria cerrada donde fluye la corriente, despreciando por ende las corrientes inducidas en conductores vecinos, como se puede ver para la inductancia en las Figs. 3.7a) - b) al circular la corriente por las mallas 1 y 2 por separado, respectivamente. En ambas figuras se observa que el campo magnético no penetra a conductores cercanos que no pertenecen a su propia malla; de este modo, se comprueba que las fórmulas analíticas no toman en cuenta el efecto de proximidad [6]. Bajo esta condición, la Tabla 3.11 muestra una gran similitud en el cálculo de $R(\omega)$ y $L(\omega)$ en ambas mallas a través del MEF y las aproximaciones analíticas.

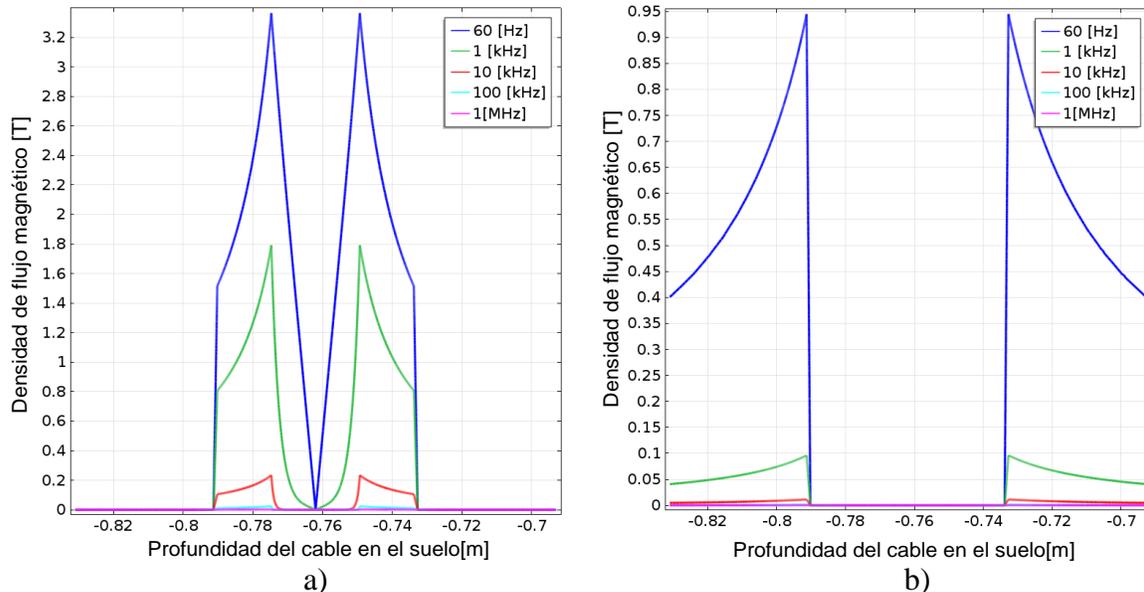


Fig. 3.7. Densidad de flujo magnético (frontera de conductor perfecto), corriente circulando solo en a) Malla 1 y b) Malla 2

Tabla 3.11. Resistencia e inductancia propia de la malla 1 y malla 2, respectivamente (con frontera de continuidad para campo magnético).

Parámetro	Malla 1				Malla 2			
	f [kHz]	MEF Zcom	Formula Analítica	Diferencia Relativa [%]	f [kHz]	MEF Zcom	Formula Analítica	Diferencia Relativa [%]
Resistencia [Ω/m]	0.06	7.32E-04	7.32E-04	0.00005	0.06	7.73E-04	7.54E-04	2.52
	1	8.07E-04	8.07E-04	0.00001	1	1.72E-03	1.69E-03	1.49
	10	1.04E-03	1.04E-03	0.22957	10	1.11E-02	1.10E-02	0.93
	100	2.26E-03	2.26E-03	0.00841	100	1.05E-01	1.11E-01	-5.24
	1000	7.43E-03	7.43E-03	0.00079	1000	1.13	1.19	-4.83
Inductancia [H/m]	0.06	2.10E-07	2.10E-07	-0.00022	0.06	1.87E-06	1.90E-06	-1.48
	1	1.79E-07	1.79E-07	-0.00025	1	1.61E-06	1.61E-06	-0.04
	10	1.67E-07	1.67E-07	0.00003	10	1.38E-06	1.38E-06	-0.18
	100	1.63E-07	1.63E-07	-0.00015	100	1.12E-06	1.13E-06	-1.07
	1000	1.61E-07	1.61E-07	-0.00022	1000	5.82E-07	8.62E-07	-1.16

No obstante, en la realidad se presentan corrientes inducidas en los conductores cercanos por la penetración del flujo magnético en ellos, tal como se puede ver en las Figs. 3.8a) – b). Esto repercute directamente en el cálculo de parámetros, observándose una mayor diferencia relativa en ambas mallas a la f_{\min} , lo cual se atribuye a que a esta frecuencia se tiene una mayor densidad de flujo magnético que penetra hacia los conductores vecinos, cuya densidad decrece a medida que se llega a la f_{\max} (véase Tabla 3.12).

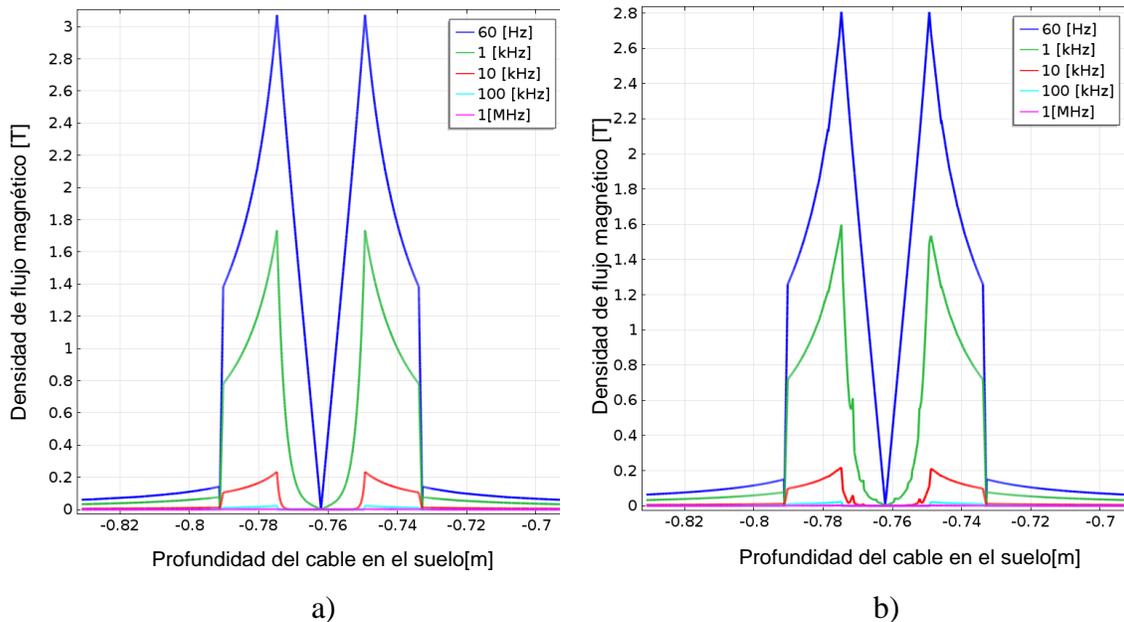


Fig. 3.8. Densidad de flujo magnético (frontera de continuidad), corriente circulando solo en a) Malla 1 y b) Malla2

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

Tabla 3.12. Resistencia e inductancia propia de la malla 1 y malla 2, respectivamente (sin frontera de continuidad para campo magnético).

Parámetro	Malla 1				Malla 2			
	f [kHz]	MEF Zcom	Formula Analítica	Diferencia Relativa [%]	f [kHz]	MEF Zcom	Formula Analítica	Diferencia Relativa [%]
Resistencia [Ω/m]	0.06	7.98E-04	7.32E-04	9.02	0.06	6.08E-03	7.54E-04	706.36
	1	8.78E-04	8.07E-04	8.79	1	7.95E-03	1.69E-03	368.97
	10	1.12E-03	1.04E-03	7.48	10	1.67E-02	1.10E-02	52.35
	100	2.30E-03	2.26E-03	1.97	100	1.06E-01	1.11E-01	-3.96
	1000	7.43E-03	7.43E-03	0.01	1000	1.13	1.19	-4.71
Inductancia [H/m]	0.06	2.98E-07	2.10E-07	42.09	0.06	6.63E-06	1.90E-06	249.65
	1	1.79E-07	1.79E-07	0.31	1	1.60E-06	1.61E-06	-0.84
	10	1.67E-07	1.67E-07	-0.02	10	1.36E-06	1.38E-06	-1.55
	100	1.63E-07	1.63E-07	-0.06	100	1.11E-06	1.13E-06	-1.69
	1000	1.61E-07	1.61E-07	0.001	1000	8.51E-07	8.62E-07	-1.34

3.3 Cálculo de la capacitancia C, usando el programa COMSOL Multiphysics 4.4®.

La capacitancia en COMSOL Multiphysics 4.4 ® se obtiene a partir del método de la carga (q) que es la base de solución que emplea la opción **terminales**. Posteriormente se valida este resultado con la fórmula analítica programada en Matlab® (véase Apéndice A).

3.3.1 Modelo del cable.

Considerando la simetría a lo largo del eje del cable, el cálculo de parámetros se realizó en dos dimensiones, por lo que los valores obtenidos son por unidad de longitud (por metro). La Fig. 3.1 muestra la geometría considerada y sus dimensiones. Cabe mencionar que el incluir las capas semiconductoras sobre núcleo y aislamiento modifica la permitividad relativa ϵ_r del aislamiento, de acuerdo con (3.22).

La simulación de los campos electromagnéticos requiere resolver las ecuaciones de Maxwell bajo las condiciones de frontera establecidas previamente. El módulo AC/DC nos permite realizar esta tarea. La física correspondiente a campos electrostáticos permite el cálculo de la capacitancia a través de la variable dependiente de potencial escalar eléctrico.

Ya que el fenómeno electrostático no depende de la frecuencia, se puede seleccionar un estudio estacionario. Se definen las variables globales que son utilizadas de forma general en la simulación y que son especialmente útiles para definir geometrías, en este caso el cable y el suelo (región de solución) y que incluso se pueden aplicar para controlar el tamaño del mallado y el proceso de solución. Así mismo, es posible definir variables

locales cuya función principal es realizar las operaciones aritméticas para el cálculo de la capacitancia por alguno de los métodos descritos en la sección 2.5.1.

Se asignan los materiales a los diferentes subdominios del cable coaxial, el suelo y el aire delimitados por trazos cerrados. Se especifican las propiedades de cada uno de estos dominios y los datos de la Tabla 3.1.

La física de campos electrostáticos se utiliza para calcular la distribución del campo eléctrico cuando se aplica una diferencia de potencial y una referencia de tierra. Previamente se establecen las condiciones iniciales y de frontera que el método numérico necesita para resolver el problema.

Se excitan los conductores con la variable V_{ap} aplicando una diferencia de potencial a través de **terminales**, activando previamente esta opción y definiendo una variable global. Esta funciona asignando valores de tensión de cero y diferente de cero para obtener la matriz de las capacitancias. Posteriormente se realiza un barrido paramétrico con todas las combinaciones para llenar la matriz de capacitancias que tiene en la diagonal las capacitancias propias de cada terminal y fuera de la diagonal las capacitancias mutuas entre las terminales.

En vista que la capacitancia no es dependiente de la frecuencia, para el cálculo de las capacitancias es suficiente asignar un mallado fino a la región de solución (ver Fig. 3.9.)

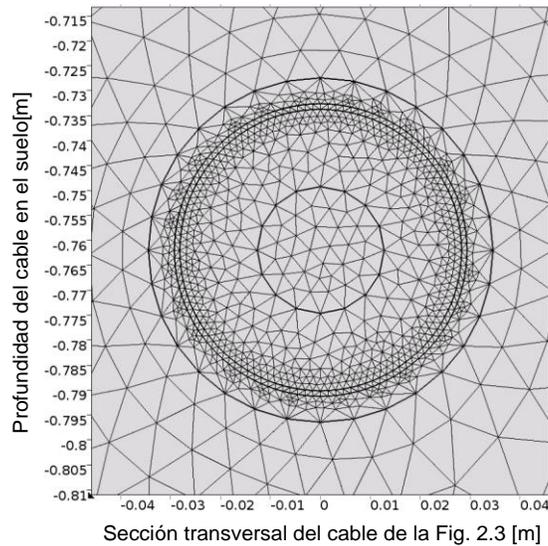


Fig. 3.9. Mallado del cable.

Una vez definida la matriz de capacitancia C , sus elementos se comparan con las formulaciones analíticas. La diferencia relativa se calcula tomando como base las fórmulas analíticas, de acuerdo con:

$$e_r(\%) = \frac{|C_{mef}| - |C_{fórmula}|}{|C_{fórmula}|} \quad (3.21)$$

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

En las Figs. 3.10a) – b) se presenta la distribución de potencial eléctrico en el cable, al excitar por separado las terminales 1 y 2, para posteriormente obtener la matriz de capacitancias.

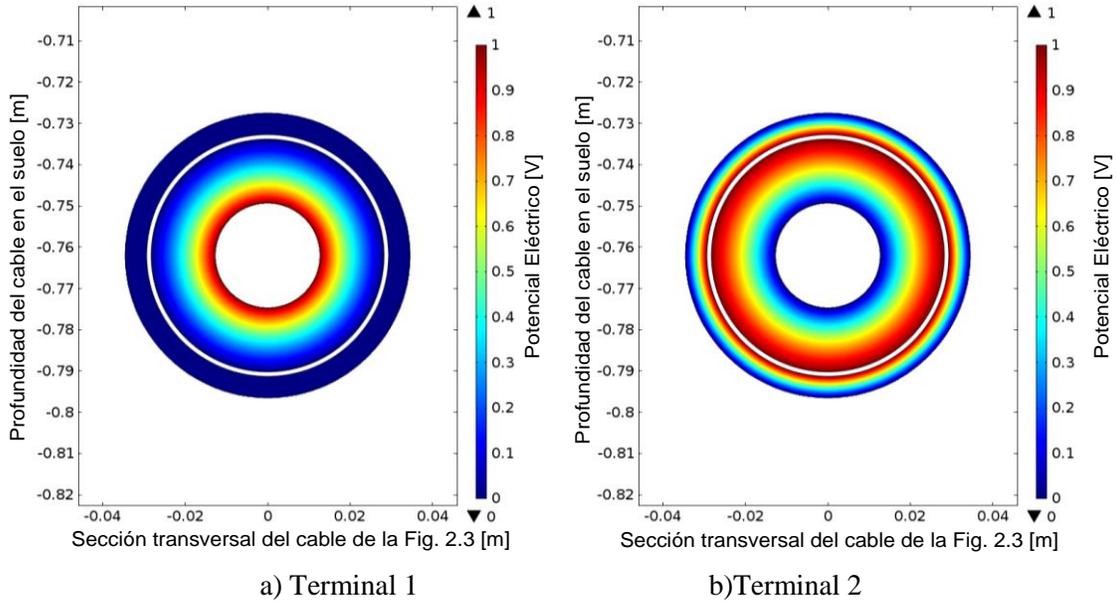


Fig. 3.10. Distribución de potencial en el cable.

3.3.2 Resultados.

En la Tabla 3.13 se presenta la diferencia relativa en las capacitancias propias y mutuas de un cable coaxial sin tomar en cuenta las capas semiconductoras en el núcleo y aislamiento. No obstante, la inclusión de éstas modifica principalmente lo relacionado a las capacitancias, como se verá más adelante, ya que su función primordial es asegurar que el campo eléctrico sea uniforme, evitando la formación de cavidades o espacios entre conductor y blindaje, y previniendo la ocurrencia de descargas parciales [62].

Tabla 3.13. Capacitancias en el cable coaxial sin capa semiconductoras.

Parámetro	Elemento	MEF Terminal	Fórmula Analítica	Diferencia Relativa* [%]
Capacitancia [F/m]	C_11	2.44E-10	2.44E-10	-0.13822
	C_12	-2.44E-10	-2.44E-10	-0.13822
	C_21	-2.44E-10	-2.44E-10	-0.13822
	C_22	1.37E-09	1.37E-09	-0.13939

Cabe mencionar que el modelado de las capas semiconductoras en programas de transitorios electromagnéticos como PSCAD/EMTDC® no es tan sencillo. Esto se debe a la naturaleza semiconductoras de estos elementos, es decir, al poseer conductividad y permitividad a la vez. Sin embargo, algunas aproximaciones permiten considerar estos elementos al simular un transitorio, ya que tienen efectos substanciales sobre las características de propagación del cable en términos de velocidad, impedancia

característica, atenuación, lo que repercute directamente sobre las formas de onda de tensión y corriente. [62]. [67].

En la actualidad, una metodología que permite incluir las capas semiconductoras al modelo del cable coaxial fue propuesta por Gustavsen *et al.* [62]., al modificar las propiedades del aislamiento y suponer que la capacitancia entre el conductor y el blindaje permanece constante. La validez del modelo ha sido corroborada mediante mediciones con resultados satisfactorios a frecuencias de hasta 1 MHz [68]. Para frecuencias en el orden de los MHz, J. Elwardt [69] planteó un método alternativo, por el cual incorporaba una capa ficticia a la geometría del cable obteniendo resultados acordes a las mediciones para este intervalo de frecuencias.

Dado que en esta tesis la frecuencia más alta de simulación corresponde a 1 MHz, se aplica el método propuesto por Gustavsen *et al.* [62], en el cual se considera que las capas semiconductoras son parte del aislamiento principal (véase Fig. 3.11), teniéndose un incremento en el espesor de éste y modificando su permitividad, de acuerdo con la ecuación (3.22). Por ejemplo, para el cable coaxial simulado la permitividad relativa μ_r en el aislamiento es de 3.5 y bajo estas consideraciones se corrige a una valor de 4.1866.

$$\epsilon_{\text{mod}} = \epsilon \frac{\ln\left(\frac{R_4}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{B}{A}\right)} \quad (3.22)$$

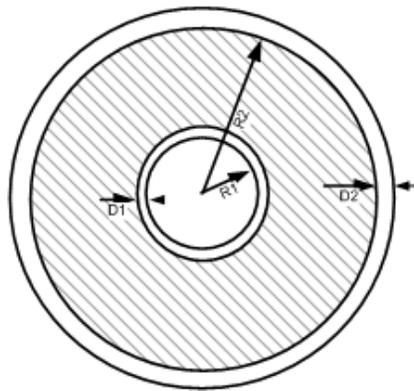


Fig. 3.11. Sección transversal de un cable coaxial con capas semiconductoras.

donde:

ϵ	Permitividad del aislamiento principal.
R_1	Radio exterior del conductor.
R_2	Radio exterior del aislamiento.
D_1	Espesor de la pantalla semiconductora interna.
D_2	Espesor de la pantalla semiconductora exterior.
$R_4 = R_2 + D_2$	Radio interior del blindaje (incluido el espesor de las pantallas semiconductoras interna y externa).
$A = R_1 + D_1$	Radio interno del aislamiento.

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

$$B = R_2 \quad \text{Radio exterior del aislamiento.}$$

En la Tabla 3.14 se presenta la diferencia relativa en las capacitancias propias y mutuas de un cable coaxial al considerar y no las capas semiconductoras en el núcleo y aislamiento aplicando el enfoque del método del elemento finito.

Tabla 3.14. Capacitancias en el cable coaxial sin y con capa semiconductor.

Parámetro	Elemento	MEF Terminal [sin CS]	MEF Terminal [con CS]	Diferencia Relativa* [%]
Capacitancia [F/m]	C_11	2.44E-10	2.64E-10	-7.51247
	C_12	-2.44E-10	-2.64E-10	-7.51247
	C_21	-2.44E-10	-2.64E-10	-7.51247
	C_22	1.37E-09	1.48E-09	-7.33506

Las diferencias relativas de las Tablas 3.13 y 3.14 corresponden a las capacitancias propias y mutuas de la matriz de capacitancias de la ecuación (2.33), En la Tabla 3.13, las diferencias relativas son las capacitancias de un cable coaxial sin capa semiconductor calculadas con el MEF para su comparación con las fórmulas analíticas, en todos los casos la mayor diferencia relativa es menor al 0.2%, por lo que en principio esta similitud permite validar el MEF para el cálculo de este parámetro de una manera más sencilla. En la Tabla 3.14, los elementos de la matriz de capacitancias se calculan únicamente empleando el MEF para una geometría de cable sin y con capa semiconductor respectivamente, se puede ver que el considerar las capas semiconductoras incrementan las capacitancias, en el peor de los casos a un valor de 7.51% , esto se debe a que el aislamiento ahora tiene un mayor espesor lo que repercute como previamente se ha mencionado en las formas de onda de tensión y corriente, velocidad y atenuación en un análisis de transitorios electromagnéticos.

CAPÍTULO 4. Cálculo de sobretensiones transitorias mediante el modelo implementado y comparaciones con PSCAD/EMTDC®.

4.1 Introducción.

En la actualidad es común utilizar programas computacionales en el dominio del tiempo para simulación de transitorios electromagnéticos (EMTP/RV®, EMTP/ATP® y PSCAD/EMTDC®), donde el usuario únicamente tiene que especificar el modelo que sea más adecuado para reproducir el fenómeno bajo estudio.

Existe una gran variedad de modelos disponibles en estos programas. La selección entre modelos de parámetros concentrados o de modelos de parámetros distribuidos depende del problema que se desea analizar, así como de la exactitud con la que se desea representar el fenómeno y del tiempo de simulación.

Independientemente del modelo empleado en la simulación de transitorios electromagnéticos en cables, una desventaja cuando se trabaja en el dominio del tiempo es el no poder representar de manera adecuada la dependencia frecuencial de los parámetros. Por lo anterior, la aplicación de modelos en el dominio de la frecuencia que puedan considerar la dependencia se ha evidenciado en las últimas décadas.

A diferencia de los modelos en el dominio del tiempo, en los modelos en la frecuencia la dependencia frecuencial de los parámetros puede incluirse de manera simple en el análisis transitorio. No obstante, una desventaja del análisis en el dominio de la frecuencia se presenta en la dificultad para incluir no linealidades en el modelo. En general los modelos en el dominio de la frecuencia ofrecen la solución más exacta a los transitorios, aun así no han podido ser incluidos en algún paquete de tipo comercial y han sido utilizados fundamentalmente como modelos para la validación de otros métodos de solución [11].

En este capítulo se comparan los espectros de frecuencia de un modelo de dos puertos en el dominio de la frecuencia desarrollado en MatLab® para los casos en los cuales los parámetros se determinan mediante aproximaciones analíticas y cuando los parámetros son calculados utilizando el MEF. Antes de presentar estas comparaciones se utiliza un modelo en el dominio del tiempo del programa comercial de simulación PSCAD-EDMTC® para la simulación de sobretensiones en los extremos de un cable subterráneo para diferentes configuraciones y validar el modelo de dos puertos. Para esta validación, en ambos modelos el cálculo de los parámetros dependientes de la frecuencia de impedancia serie $Z(\omega)$ se obtienen de las formulaciones analíticas de Schelkunoff [21] y Saad *et al.* [49] para las impedancias en los conductores tubulares y de retorno por tierra, respectivamente; mientras que para la admitancia en derivación se consideran las aproximaciones propuestas por Carson [23]. De igual manera, con el objetivo en que ambos modelos representen de mejor manera una condición transitoria, es que en ellos se consideran factores importantes como lo es: la inclusión de capas semiconductoras interna y externa sobre núcleo y

aislamiento respectivamente, así como el método de aterrizamiento en sus pantallas metálicas, que puede ser sin aterrizamiento, en uno de sus extremos o en ambos, lo que sin lugar a dudas modifica el tipo de respuesta transitoria.

4.2 Metodología para la validación en el dominio del tiempo del modelo de dos puertos.

Para la comparación de las sobretensiones del modelo de dos puertos implementado en esta tesis y del modelo en el dominio del tiempo de PSCAD/EMTDC®, las pantallas metálicas se encuentran aterrizadas en uno, en ambos de sus extremos o sin aterrizamiento en alguno de sus extremos. Para la simulación de transitorios electromagnéticos en sistemas de cables subterráneos con aterrizamiento cruzado en las pantallas metálicas (crossbonding), se requiere cambiar la matriz de impedancia serie para cada sección menor debido a los cambios en el acoplamiento de las tres fases [66]; simulaciones de este tipo de configuraciones están fuera del alcance de este trabajo.

Referente a las consideraciones del modelo de dos puertos, la herramienta de la transformada numérica de Laplace (TNL) permitió que las operaciones se realizaran directamente en el dominio de la frecuencia. Cabe mencionar que los parámetros de los cables subterráneos se obtienen en por unidad de longitud. Para la excitación se utilizó una función escalón unitario en la frecuencia con un periodo de observación 3.33 ms para 1024 muestras (ver Fig. 4.1). Posteriormente, se emplea la técnica de descomposición modal y la transformada numérica de Laplace inversa (TNLI) (véase Apéndice B) para obtener la respuesta transitoria en el dominio del tiempo y comparar con el modelo de fases del programa comercial PSCAD/EMTDC®.

En cuanto a los aspectos generales para las simulaciones en el dominio del tiempo, los parámetros a considerar son muy similares: se emplea una longitud de 16.0930 km para cada uno de los cables subterráneos energizados por una fuente ideal de tensión tipo escalón unitario (ver Fig. 4.1), para un tiempo de observación de 3.33 ms con incrementos en pasos de tiempo de $3.2552 \mu s$, obteniéndose 1024 muestras (misma cantidad que el modelo en el dominio de la frecuencia). En todos los casos el extremo emisor del cable se encuentra en circuito abierto.

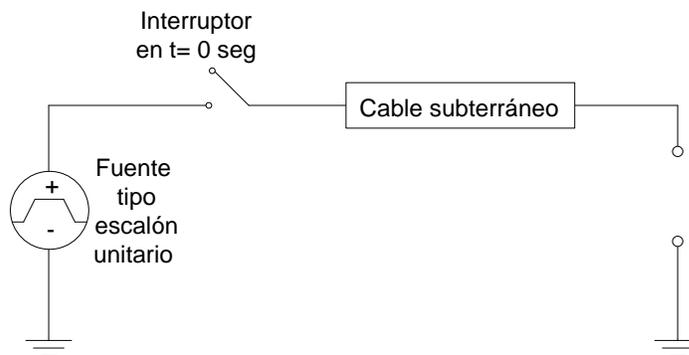


Fig. 4.1. Diagrama de excitación con una fuente tipo escalón unitario (en el dominio de la frecuencia y tiempo) a un cable subterráneo.

Idealmente, en un cable sin pérdidas y en vacío la tensión en el extremo receptor es de 2 p.u.. Sin embargo, debido a la atenuación (por la propia resistencia del cable) este valor es menor.

El siguiente diagrama de flujo de la Fig. 4.2, ilustra la metodología durante el proceso de obtención de las respuestas transitorias de voltaje en el sistema de cables subterráneos, empleando el modelo de dos puertos y el paquete computacional PSCAD/EMTDC®. Dicho sistema de cables subterráneos corresponde al caso clásico de análisis transitorio en cables reportado por Wedepohl y Wilcox [33].

1. Datos de la geometría del cable.

En el modelo de dos puertos, al inicio del algoritmo se declaran las dimensiones geométricas de cables coaxiales, distancias entre fases, profundidad a la que están enterrados, propiedades electromagnéticas de materiales, etc. Estas variables de entrada permiten determinar los parámetros \mathbf{Z} y \mathbf{Y} posteriormente, a través de aproximaciones analíticas. Cabe mencionar, que cada geometría en particular requiere de sus formulaciones analíticas para el cálculo de estos parámetros.

De manera similar, en el programa comercial el usuario únicamente tiene que especificar estas dimensiones, propiedades constitutivas, así como otras características adicionales: capas semiconductoras, método de aterrizamiento de las pantallas metálicas, todo esto a través de una interfaz que puede ser visualizada en dicho programa.

2. Cálculo de los Parámetros.

El PSCAD/EMTDC® al igual que el algoritmo desarrollado en MatLab® emplean aproximaciones analíticas para el cálculo de \mathbf{Z} y \mathbf{Y} .

3. Modelos empleados en la obtención de las sobretensiones transitorias.

En el modelo de dos puertos desarrollado en MatLab® se emplea la transformada numérica de Laplace inversa (TNLI) para obtener las respuestas transitorias, mientras que en el tiempo se emplea un modelo en el dominio de fases del programa comercial PSCAD/EMTDC®.

4. Respuesta Transitoria.

Las tensiones y sobretensiones transitorias se suscitan en los extremos del cable coaxial, para representar la propagación de la onda de tensión de cada uno de los conductores en el cable (núcleo, pantalla metálica y armadura), ya sea al considerar o no la inclusión de las capas semiconductoras.

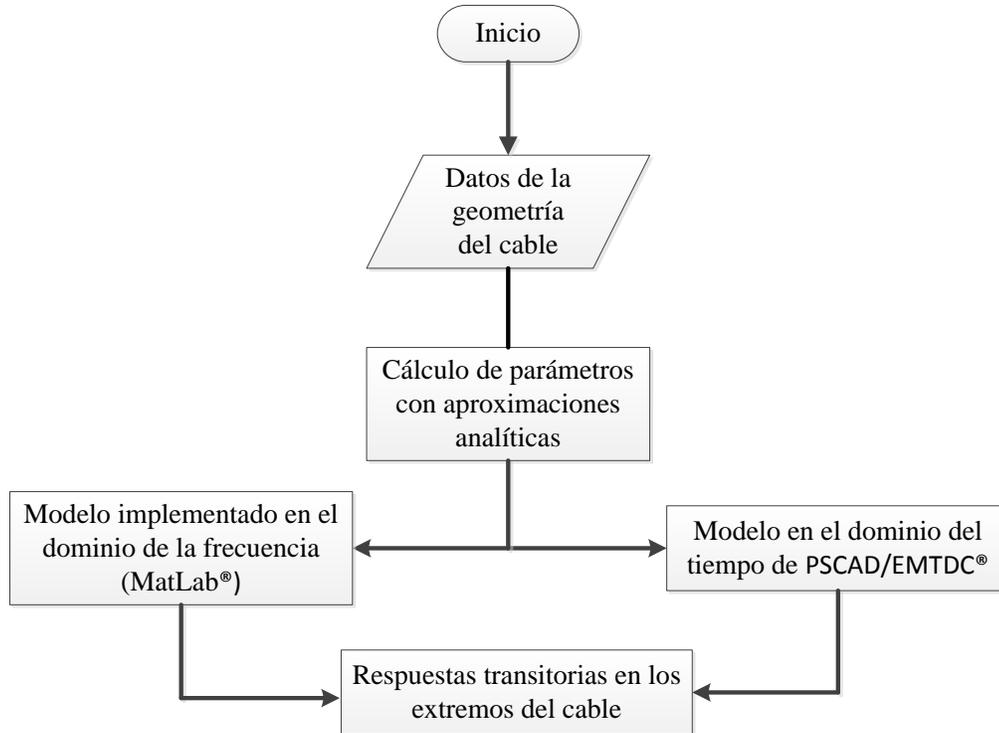


Fig. 4.2. Diagrama de flujo para la obtención de sobretensiones transitorias en el cable subterráneo.

4.3 Resultados de la comparación de la respuesta transitoria de tensión.

En este apartado se presentan los resultados obtenidos para validar el modelo desarrollado en el dominio de la frecuencia con el modelo en el dominio del tiempo (dominio de fases) del programa comercial PSCAD/EMTDC® para tres configuraciones de cables subterráneos.

Es importante mencionar que tanto los parámetros como las respuestas transitorias del modelo de dos puertos se realizan en el dominio de Laplace (plano complejo), es decir, para $s = c + j\omega$, y que la técnica de la TNLI permite llevar los valores al tiempo para su posterior comparación, ya que en las formulaciones analíticas el cálculo se realiza también en el plano complejo. Por el contrario, con el MEF los parámetros se calculan en la frecuencia para $s = j\omega$, y su interpolación al plano complejo no es tan sencilla debido a la constante de amortiguamiento c para cada valor de frecuencia. Esta es la razón por la cual se comparan únicamente los espectros de frecuencia.

En cuanto a la simulaciones en el tiempo, en algunos casos es posible tomar en cuenta el efecto de las capas semiconductoras sobre el núcleo y aislamiento, que si bien es una forma simplificada, da una mejor aproximación de los resultados; de igual manera al no poder representar la forma helicoidal de la pantalla metálica se supone que éstas son cilíndricas, tal como lo indican las aproximaciones.

En las simulaciones, el primer caso corresponde a un cable de media tensión, el segundo a de un cable submarino y por último a la configuración de un sistema en posición horizontal muy común para la transmisión de energía eléctrica en alta tensión.

4.3.1 Caso A: Respuesta transitoria de tensión en un cable de potencia.

En este primer caso se presenta la geometría de un cable subterráneo de media tensión comúnmente empleado a nivel distribución. En las simulaciones se muestra el efecto de las capas semiconductoras sobre la forma de onda. La selección de esta geometría permite validar el modelo para su extensión a sistemas más complejos.

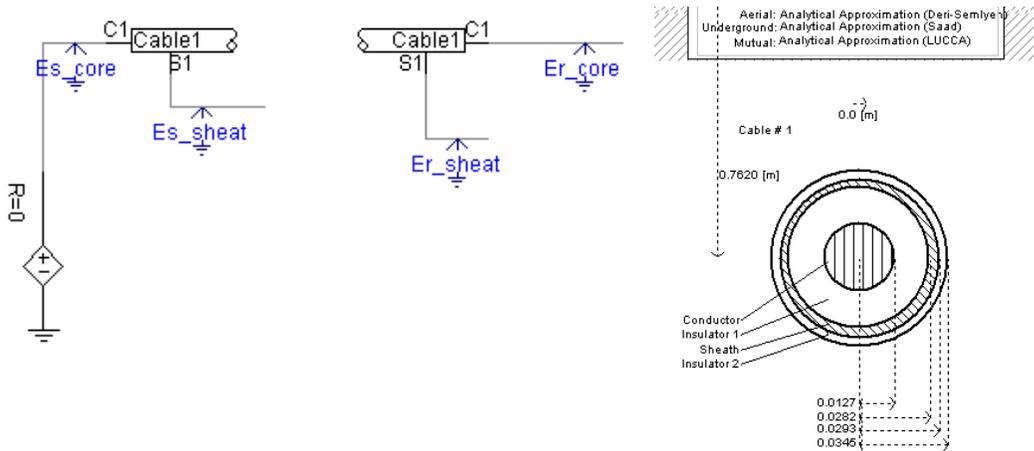


Fig. 4.3. Arreglo en PSCAD® y sección transversal cable de potencia.

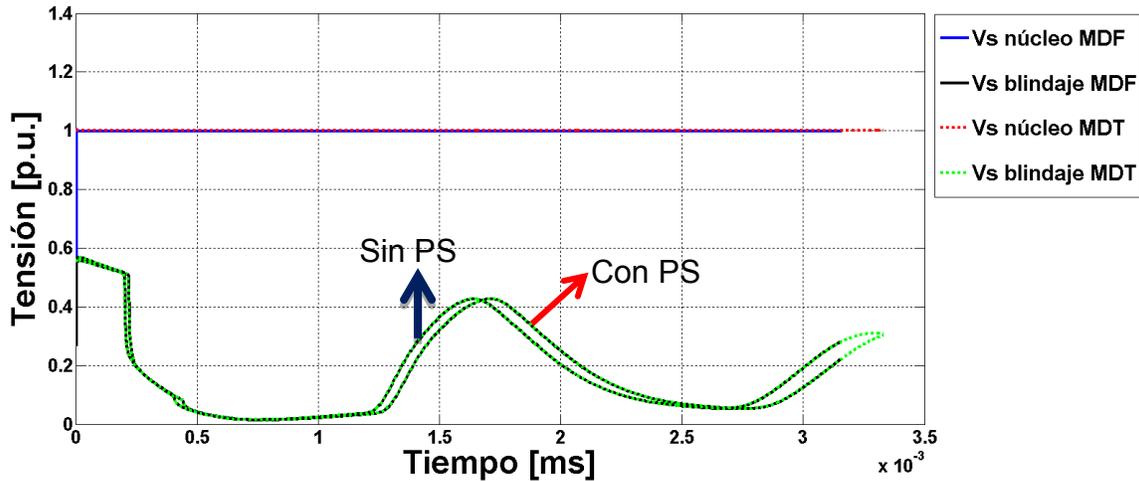


Fig. 4.4. Respuesta transitoria de tensión en el extremo emisor del cable excitando el núcleo, con extremo receptor en vacío y sin aterrizamiento de pantalla en sus extremos (sin y con pantalla semiconductor-PS).

Vs: Tensión en el extremo emisor.

MDF: Modelo en el dominio de la frecuencia (Modelo de 2 puertos).

MDT: Modelo en el dominio del tiempo (PSCAD/EMTDC®).

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

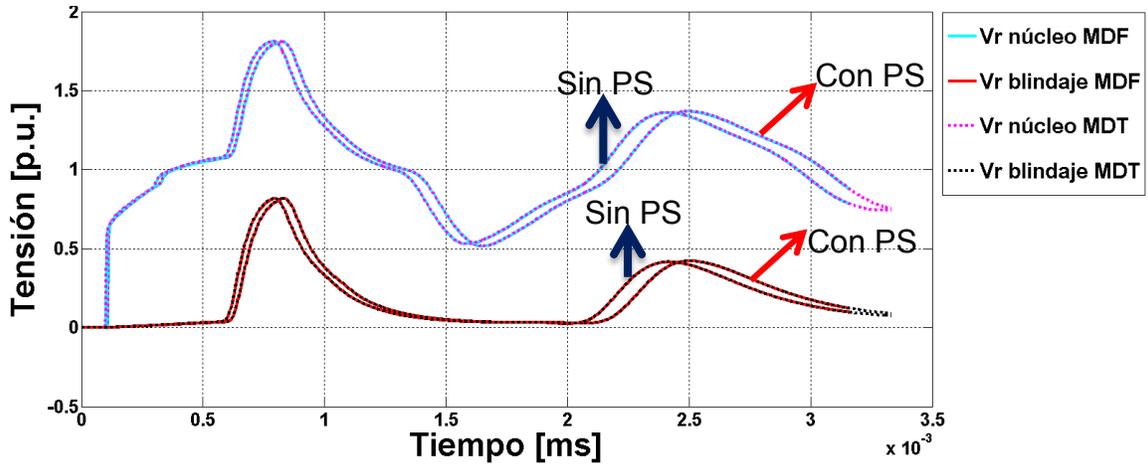


Fig. 4.5. Respuesta transitoria de tensión en el extremo receptor del cable excitando el núcleo, con extremo receptor en vacío y sin aterrizamiento de pantalla en sus extremos (sin y con pantalla semiconductor-PS).

Vr: Tensión en el extremo receptor.

MDF: Modelo en el dominio de la frecuencia (Modelo de 2 puertos).

MDT: Modelo en el dominio del tiempo (PSCAD/EMTDC®).

En las Figs. 4.4 y 4.5 puede observarse el retardo que provoca la inclusión de las capas semiconductoras en las ondas de tensión. En mediciones experimentales se ha verificado que estas capas semiconductoras modifican también su magnitud. Sin embargo, no es posible reproducir esta atenuación, ya que el paquete comercial no permite incluir un valor de conductividad en dichas capas. En la Fig. 4.4 se puede observar una tensión transitoria de 0.5 p.u en el extremo emisor de la pantalla metálica, mientras que en la Fig. 4.5 se presentan sobretensiones y tensiones transitorias del orden de 1.8 p.u. y 0.8 p.u en el extremo receptor del núcleo y pantalla metálica respectivamente, al no estar aterrizadas en sus extremos.

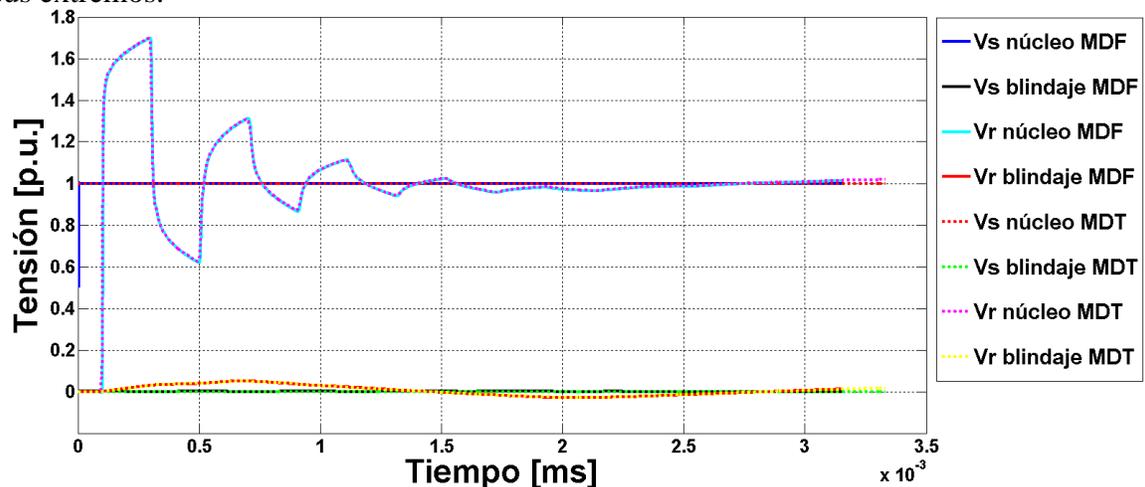


Fig. 4.6. Respuesta transitoria de tensión en ambos extremos del cable excitando el núcleo, con extremo receptor en vacío y con aterrizamiento de pantalla en el extremo emisor.

Vs: Tensión en el extremo emisor; **Vr:** Tensión en el extremo receptor

MDF: Modelo en el dominio de la frecuencia (Modelo de 2 puertos).

MDT: Modelo en el dominio del tiempo (PSCAD/EMTDC®).

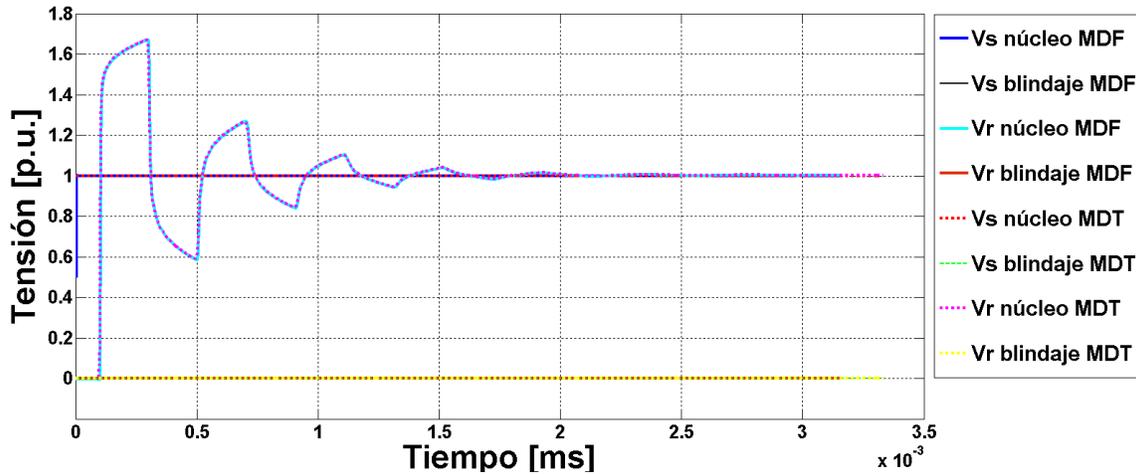


Fig. 4.7. Respuesta transitoria de tensión en ambos extremos del cable excitando el núcleo, con extremo receptor en vacío y aterrizamiento de pantalla en ambos de sus extremos.
Vs: Tensión en el extremo emisor; **Vr:** Tensión en el extremo receptor
MDF: Modelo en el dominio de la frecuencia (Modelo de 2 puertos).
MDT: Modelo en el dominio del tiempo (PSCAD/EMTDC®).

En las Figs. 4.6 y 4.7 se muestran las sobretensiones transitorias con los métodos de puesta a tierra comúnmente utilizados para las pantallas metálicas en líneas cortas. En la Fig. 4.6 las sobretensiones en el extremo receptor se presentan en el núcleo y pantalla, mientras que en la Fig. 4.7 solo en el núcleo. En esta última aparecen corrientes circulantes sobre la trayectoria cerrada que forma la pantalla metálica y el suelo, ocasionando pérdidas por efecto Joule y por ende una reducción en la ampacidad del cable. Sin embargo, esta elección dependerá de los factores descritos en la sección de aterrizamiento de las pantallas metálicas del apéndice A. En general, se ha validado la eficiencia del modelo desarrollado para representar las sobretensiones transitorias independientemente del método de puesta a tierra de las pantallas metálicas (a excepción del método cruzado o crossbonding).

4.3.2 Caso B: Respuesta transitoria de tensión en un cable de potencia con armadura.

Los cables con armadura se emplean bajo condiciones de esfuerzo considerables, como es el caso de sistemas subterráneos empleados en plataformas para extracción de petróleo, en donde la armadura le provee estabilidad y rigidez mecánica al cable. En las simulaciones también se muestra el efecto que las capas semiconductoras producen sobre la forma de onda.

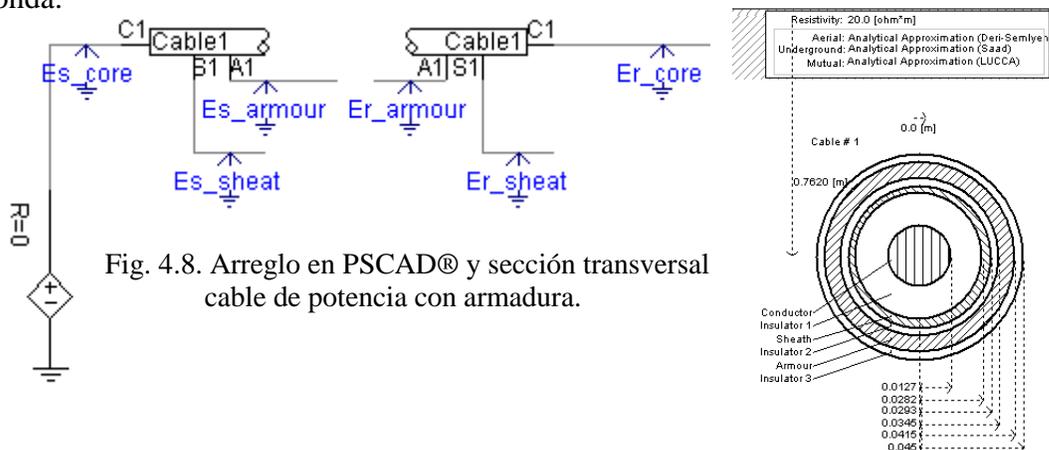


Fig. 4.8. Arreglo en PSCAD® y sección transversal cable de potencia con armadura.

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

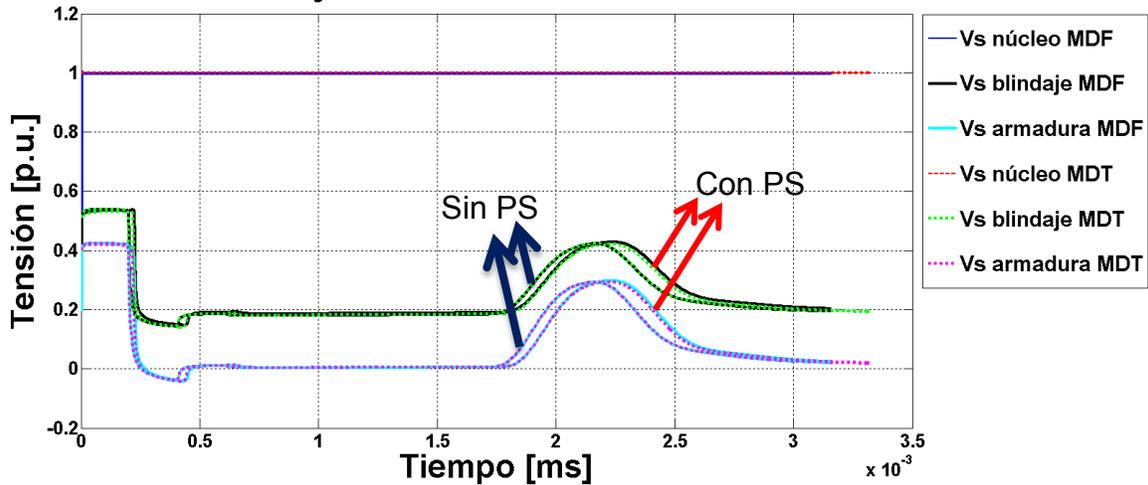


Fig. 4.9. Respuesta transitoria de tensión en el extremo emisor del cable excitando el núcleo, con extremo receptor en vacío y sin aterrizamiento de pantalla en el extremo emisor (sin y con pantalla semiconductor-PS), V_s : Tensión en el extremo emisor.
MDF: Modelo en el dominio de la frecuencia (Modelo de 2 puertos).
MDT: Modelo en el dominio del tiempo (PSCAD/EMTDC®).

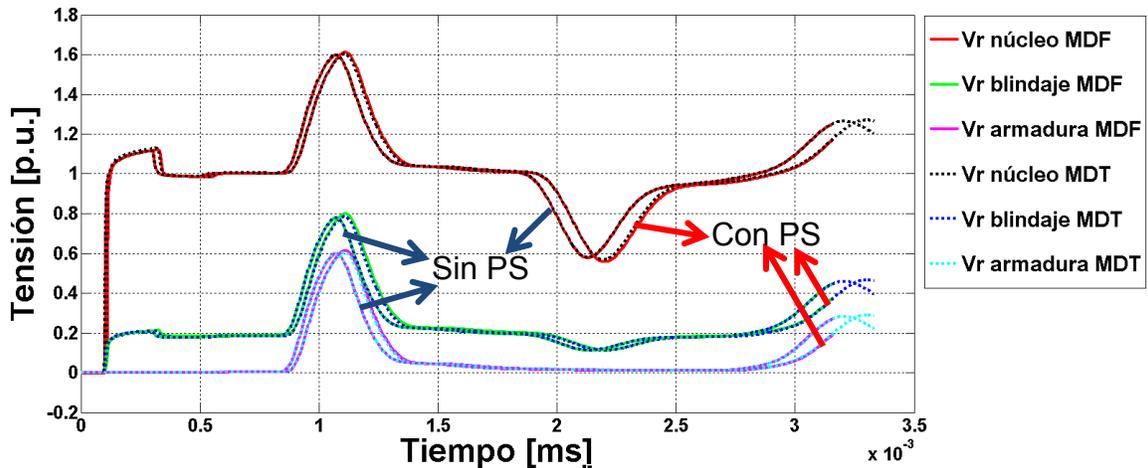


Fig. 4.10. Respuesta transitoria de tensión en el extremo receptor del cable excitando el núcleo, con extremo receptor en vacío y con aterrizamiento de pantalla en el extremo emisor (sin y con pantalla semiconductor-PS).
 V_r : Tensión en el extremo receptor.
MDF: Modelo en el dominio de la frecuencia (Modelo de 2 puertos).
MDT: Modelo en el dominio del tiempo (PSCAD/EMTDC®).

En las Figs. 4.9 y 4.10 se muestran las formas de onda de tensión en el extremo emisor y receptor del cable, respectivamente, sin aterrizamiento a tierra de las pantallas. En la primera gráfica, al aplicar una excitación tipo escalón unitario directamente en el núcleo del cable se inducen tensiones en el blindaje y la armadura del extremo emisor del cable con un valor aproximado de 0.5 p.u. y 0.4 p.u., respectivamente; mientras que en la Fig. 4.10 se presentan tensiones inducidas en el otro extremo con valores del 0.8 p.u. y 0.6 p.u. para el

blindaje y armadura y una sobretensión de 1.6 p.u. para el núcleo. En ambos casos estas tensiones representan un valor del 50% y 40% de la tensión total aplicada. De la misma forma, en ambas gráficas se incluye el efecto de incluir las capas semiconductoras al núcleo con resultados muy similares al caso A.

4.3.3 Caso C: Respuesta transitoria de tensión en un sistema trifásico de cables de potencia en posición horizontal.

Es común que el siguiente arreglo de cables subterráneos en sistemas de distribución se encuentre limitado a longitudes cortas. Esto se debe principalmente a que las tensiones inducidas son diferentes para cada una de las fases al no ser una configuración simétrica.

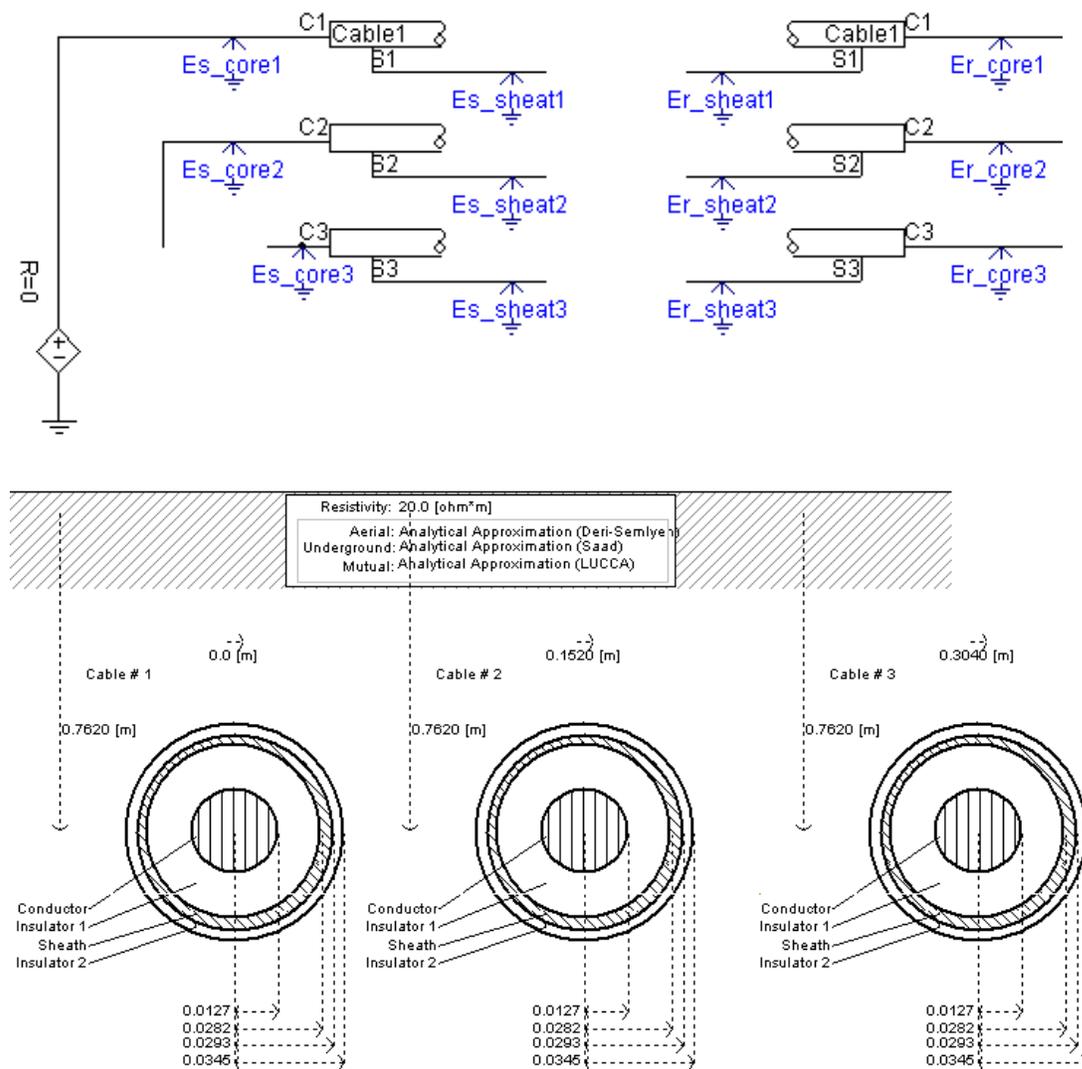
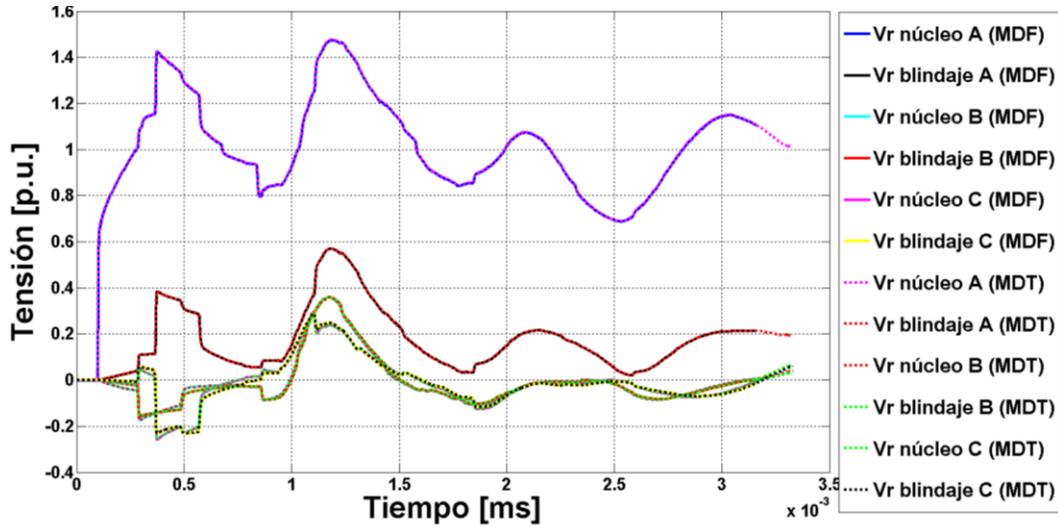
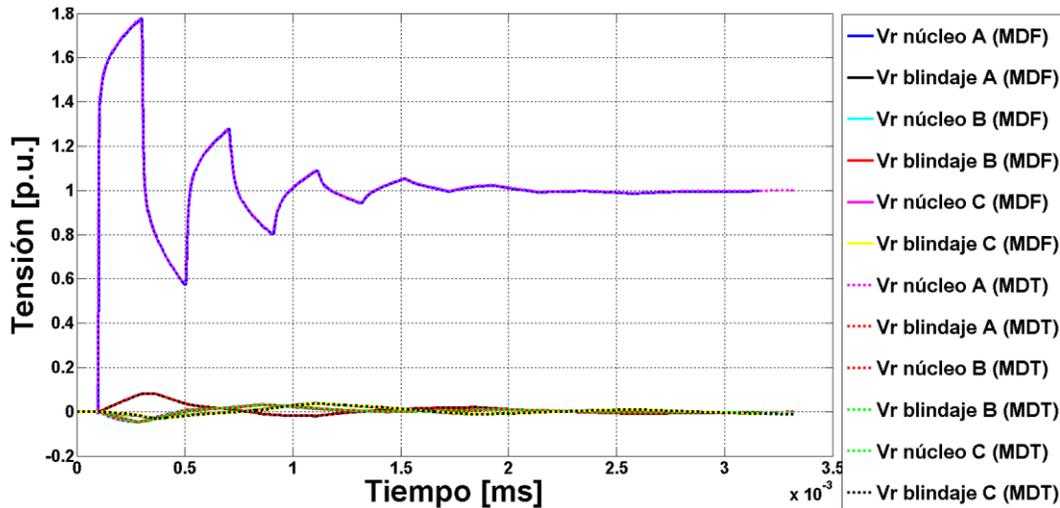


Fig. 4.11. Arreglo en PSCAD® y sección transversal del sistema trifásico de cables de potencia en posición horizontal.

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.



a)



b)

Fig. 4.12. Respuesta transitoria de tensión en el núcleo y blindaje de las fases A, B y C, en el extremo receptor del cable excitando núcleo de la fase A, con el extremo receptor en vacío: **a)** sin aterrizamiento de pantalla en sus extremos y **b)** con pantalla aterrizada en el extremo emisor.

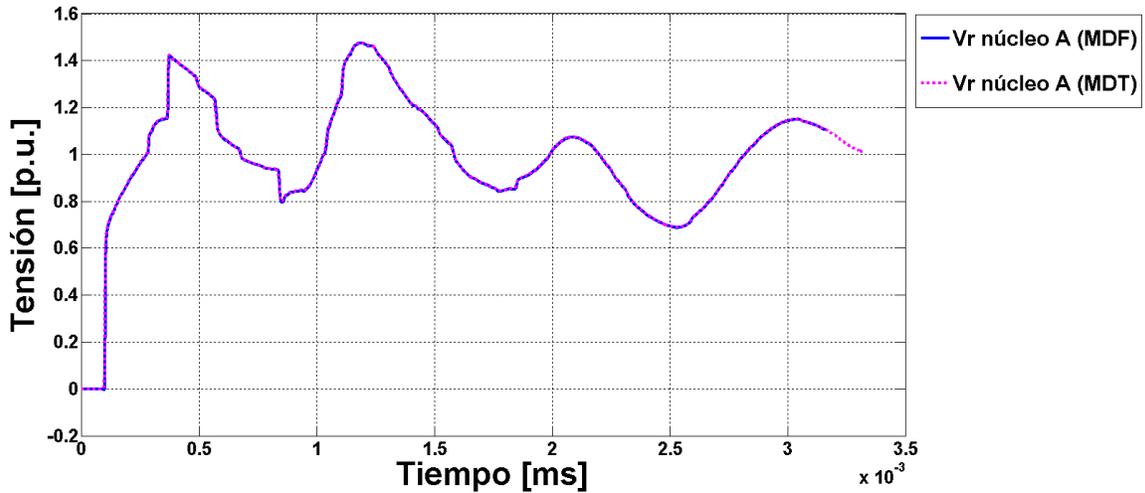
Vr: Tensión en el extremo receptor

MDF: Modelo en el dominio de la frecuencia (Modelo de 2 puertos).

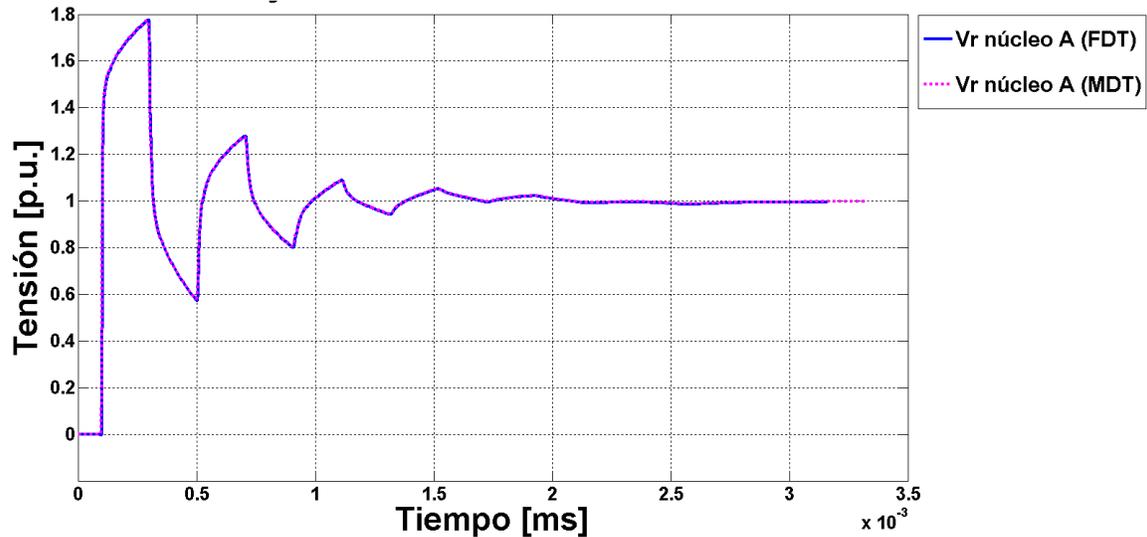
MDT: Modelo en el dominio del tiempo (PSCAD/EMTDC®).

Las Figs. 4.12a) – b) corresponden a las tensiones transitorias en el extremo receptor del núcleo y blindaje de la fase excitada (fase A), así como a las tensiones transitorias inducidas en las fases B y C de estos mismos elementos.

Como es de esperarse, la mayor sobretensión y tensión transitoria se presenta en los elementos conductores (núcleo y blindaje) de la fase excitada, mientras que las tensiones inducidas son de una menor magnitud pero no por ello dejan de ser importantes. Para realizar un análisis más detallado de los transitorios en general, es que en ventanas posteriores se analizan por separado estos fenómenos.



a)



b)

Fig. 4.13. Respuesta transitoria de tensión en el núcleo de la fase A en el extremo receptor del cable excitando núcleo de la fase A, con el extremo receptor en vacío: **a)** sin aterrizamiento de pantalla en sus extremos y **b)** con pantalla aterrizada en el extremo emisor.

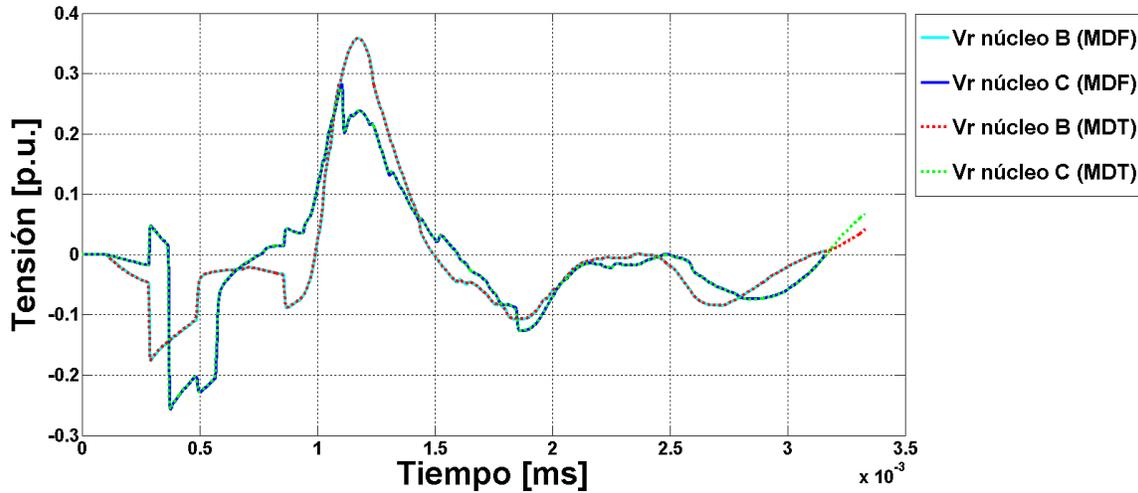
Vr: Tensión en el extremo receptor

MDF: Modelo en el dominio de la frecuencia (Modelo de 2 puertos).

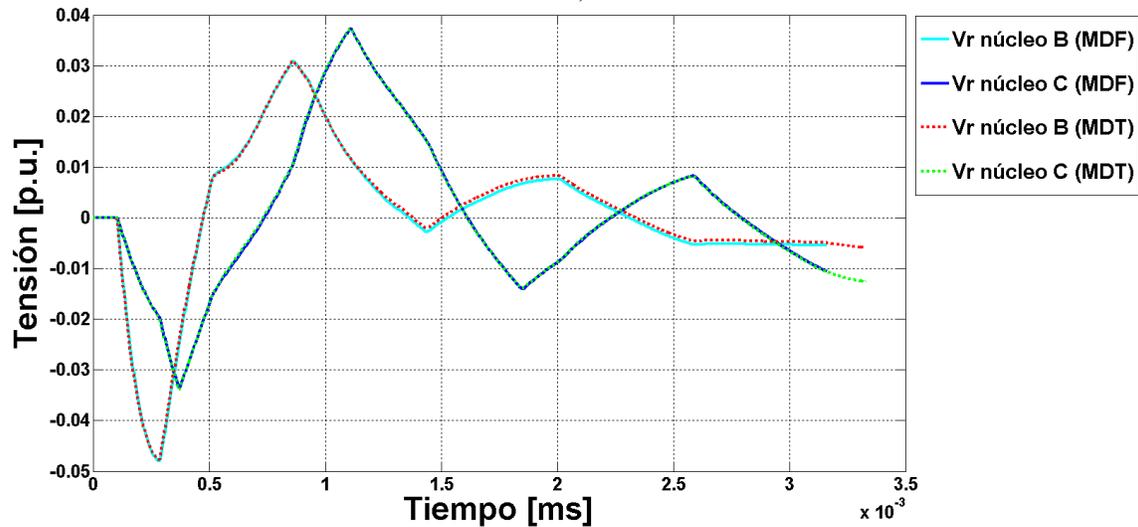
MDT: Modelo en el dominio del tiempo (PSCAD/EMTDC®).

En las Figs. 4.13a) – b) las sobretensiones transitorias en el extremo receptor del núcleo de la fase excitada alcanzan una magnitud de 1.8 p.u. y 1.4 p.u. para los casos cuando se tiene y no un método de aterrizamiento de las pantallas metálicas. Se logra una atenuación más rápida en la forma de onda de la tensión cuando el cable está aterrizado en uno de los extremos de la pantalla, aunque en ocasiones una mayor duración del transitorio suele causar daños más significativos en el aislamiento (véase Fig. 4.13a).

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.



a)



b)

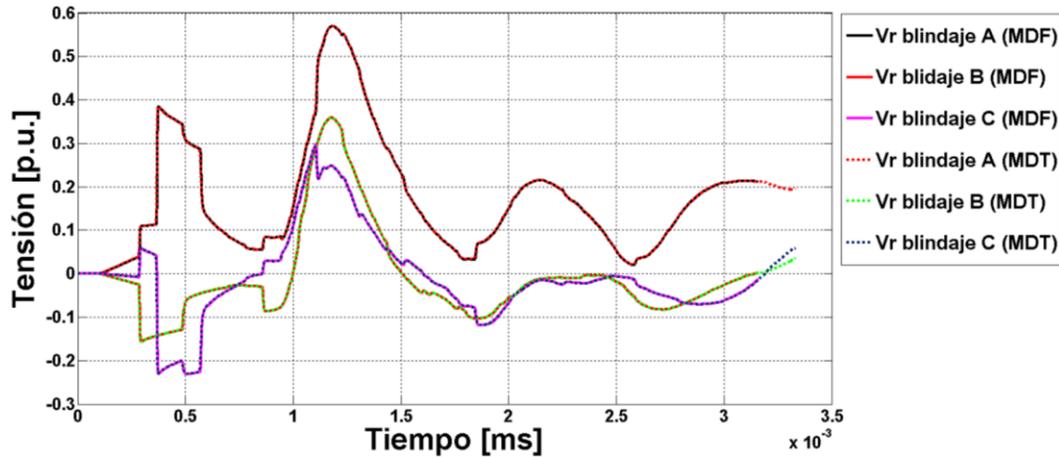
Fig. 4.14. Respuesta transitoria de tensión en el núcleo de las fases B y C en el extremo receptor del cable excitando el núcleo de la fase A, con el extremo receptor en vacío: **a)** sin aterrizamiento de pantalla en sus extremos y **b)** con pantalla aterrizada en el extremo emisor.

Vr: Tensión en el extremo receptor

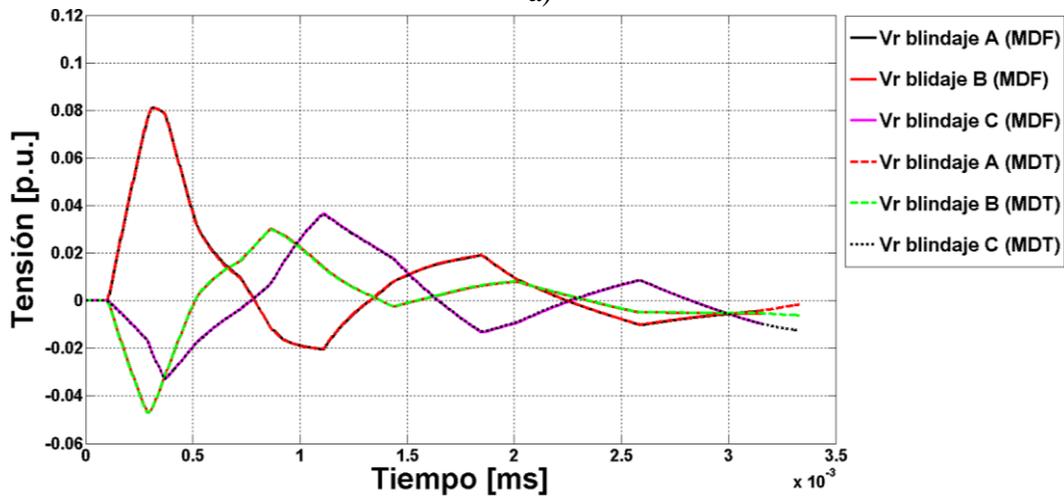
MDF: Modelo en el dominio de la frecuencia (Modelo de 2 puertos).

MDT: Modelo en el dominio del tiempo (PSCAD/EMTDC®).

Las Figs. 4.14a) – b) corresponden a las tensiones inducidas en el núcleo de las fases B y C cuando se excita el núcleo de la fase A del sistema de cables subterráneos para diferentes sistemas de aterrizamiento de las pantallas metálicas. En ambos casos la mayor tensión inducida es en la fase B, que es la más próxima a la fase excitada con un valor de 0.35 p.u y -0.05 p.u., aunque esta última es casi nula. En la fase C, que es la que más lejana del punto de excitación, también se tienen tensiones del orden de 0.3 p.u y -0.03 p.u, respectivamente.



a)



b)

Fig. 4.15. Respuesta transitoria de tensión en la pantalla de las fases A, B y C en el extremo receptor del cable excitando el núcleo de la fase A, con el extremo receptor en vacío: **a)** sin aterrizamiento de pantalla en sus extremos y **b)** con pantalla aterrizada en el extremo emisor.

Vr: Tensión en el extremo receptor

MDF: Modelo en el dominio de la frecuencia (Modelo de 2 puertos).

MDT: Modelo en el dominio del tiempo (PSCAD/EMTDC®).

Por último, en la Fig. 4.15a) la mayor tensión transitoria se presenta en la pantalla metálica de la fase excitada con un valor de 0.5 p.u., mientras que en las pantallas de las fases no excitadas B y C se alcanzan valores de 0.30 p.u. y 0.35 p.u. En todos los casos, la magnitud de las tensiones transitorias llega a un valor considerable; de aquí la importancia del aterrizamiento de las pantallas al menos en un punto.

En la Fig. 4.15b), la tensión más alta se encuentra en la pantalla metálica de la fase excitada con un valor cercano al 0.1 p.u., mientras que en las pantallas de las fases adyacentes este valor es mínimo; en este caso las tensiones transitorias obtenidas corresponden a un método de aterrizamiento de las pantallas en un punto. En ocasiones, para reducir aún más la magnitud de las tensiones transitorias se emplean limitadores de potencial colocados a cierta longitud del cable.

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

En todos los casos, en las Figs. 4.12, 4.13, 4.14 y 4.15 las tensiones corresponden al hecho de excitar el núcleo del cable de la fase A o C.

4.4 Metodología para el cálculo de los espectros de frecuencia en un cable coaxial.

A continuación, se realiza un análisis del espectro de frecuencias tanto en magnitud como en fase de un modelo de dos puertos en el dominio de la frecuencia desarrollado en MatLab®, con los parámetros obtenidos del MEF para su comparación con los parámetros calculados de las aproximaciones analíticas. Se consideran dos casos: a) tomando en cuenta el efecto de proximidad de conductores vecinos, b) despreciando este efecto como lo hacen las aproximaciones analíticas.

Los espectros de frecuencia del cable coaxial de la Fig. 2.3 pertenecen a los elementos de la matriz de impedancia serie: Z_{N_N} y Z_{N_B} , no se muestran los correspondientes a Z_{B_B} ya que son muy similares al primero, por lo que se omiten. Este análisis se lleva a cabo para un intervalo de frecuencia de 0.3050 MHz a 1.020 MHz y permite identificar las frecuencias características (frecuencias resonantes) para los fenómenos involucrados en esta gama de frecuencias.

En cuanto a los aspectos generales en la obtención de los espectros de frecuencia, los parámetros se obtienen en por unidad de longitud, aplicando una excitación tipo escalón unitario, para 128 muestras de frecuencia distribuidas logarítmicamente, con el extremo receptor del cable en circuito abierto. Los parámetros se obtienen de las formulas analíticas [21] para su comparación con los valores calculados del MEF.

El diagrama de flujo de la Fig. 4.16 ilustra la metodología durante el proceso de obtención de las respuestas en frecuencia de tensión y fase en ambos extremos de un cable subterráneo. El proceso se divide en las siguientes partes:

1. Datos de la geometría del cable.

En el modelo desarrollado en el dominio de la frecuencia, al inicio del algoritmo se declaran las dimensiones geométricas del cable coaxial, distancias entre elementos conductores, profundidad a la que se encuentra enterrado, propiedades electromagnéticas de materiales, etc.

Estos datos se utilizan en el cálculo de parámetros mediante formulaciones analíticas, para posteriormente introducir dichos parámetros en el modelo de dos puertos y obtener el espectro de frecuencias. Por su parte, de la interfaz del paquete computacional COMSOL Multiphysics4.4® se extrae este mismo número de muestras de los parámetros de impedancia serie para después introducirlos como datos de entrada al modelo de dos puertos.

2. Cálculo de los Parámetros.

En el algoritmo desarrollado en MatLab® el cálculo de \mathbf{Z} y \mathbf{Y} se obtiene de las aproximaciones analíticas de Schelkunoff y Saad *et al.*, para las impedancias en los conductores tubulares e impedancia de retorno por tierra respectivamente, mientras que en

el caso del paquete computacional COMSOL Multiphysics4.4® la solución es numérica y se lleva a cabo a través de la solución de la ecuaciones de campo electromagnético, específicamente de la ecuación de Ampere-Maxwell y ecuación de continuidad, además de las definiciones de potencial vectorial magnético, potencial escalar eléctrico y las relaciones constitutivas.

3. Modelo empleado en los espectros de frecuencia.

En el modelo de dos puertos desarrollado en MatLab® se emplea la transformada numérica de Laplace inversa (TNLI) para obtener los espectros de frecuencia, en función de la frecuencia angular $s = j\omega$, es decir, para $c = 0$. Esto con los parámetros de impedancia serie calculados de aproximaciones analíticas y del MEF.

4. Respuesta en frecuencia.

Los espectros de frecuencia en magnitud y de fase se calculan en ambos extremos del cable subterráneo para los elementos propio y mutuo de la matriz de impedancia serie Z_{N_N} y Z_{N_B} de un cable coaxial. Estos espectros de frecuencia se obtienen de los parámetros calculados de aproximaciones analíticas y por el MEF; en este último caso sin y tomando en cuenta el efecto de proximidad de los conductores vecinos.

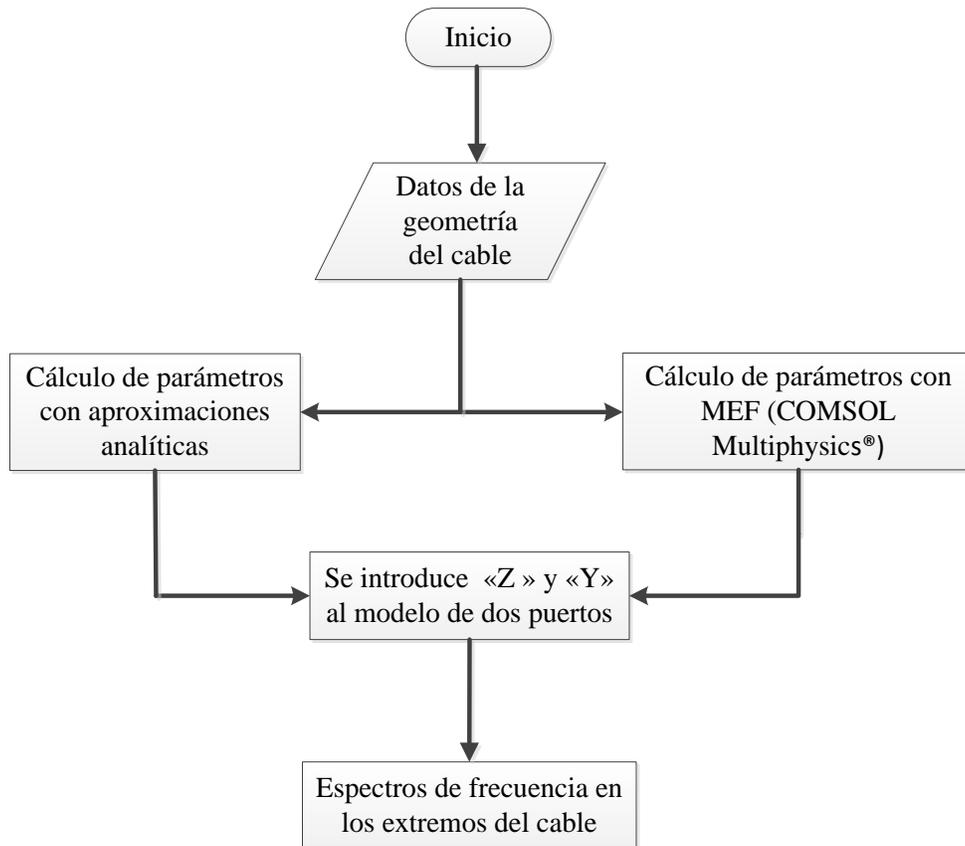


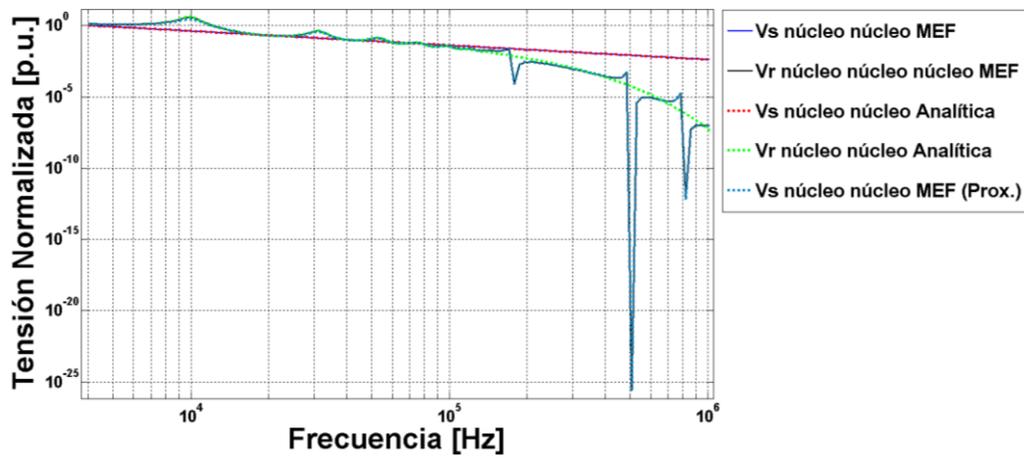
Fig. 4.16. Diagrama de flujo para obtención de los espectros de frecuencia en el cable subterráneo.

4.5 Resultados de la respuesta en frecuencia en tensión y fase.

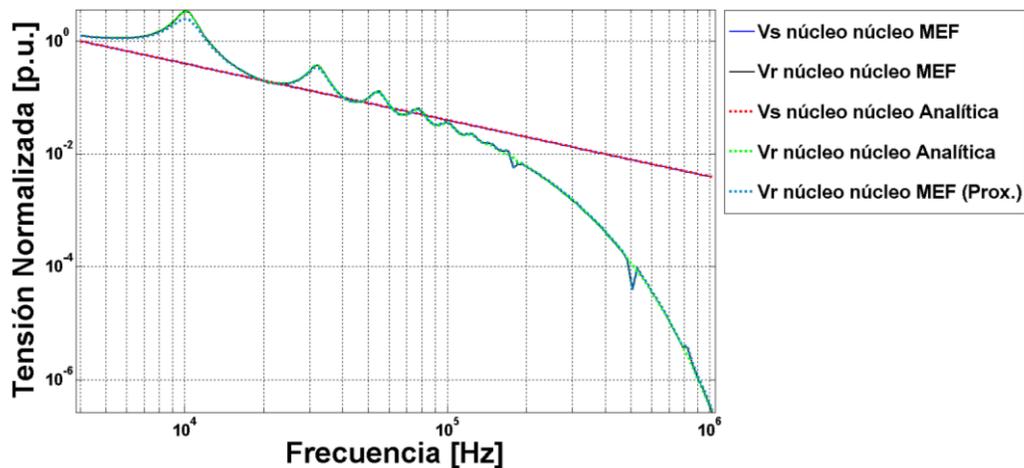
A continuación se muestran las gráficas de la respuesta en frecuencia con los parámetros calculados de aproximaciones analíticas y del MEF para un cable coaxial sencillo; en ambos casos esto se logra con el modelo de dos puertos validado previamente.

4.5.1 Espectro de frecuencia de tensión en la impedancia propia del núcleo ($Z_{N,N}$).

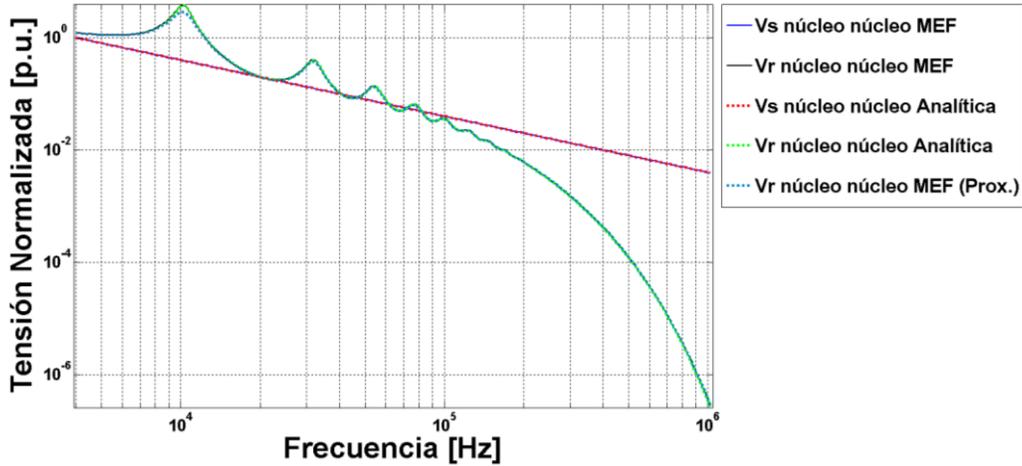
Las gráficas de la Fig. 4.17 corresponden a los espectros de frecuencia de tensión de la impedancia serie propia del núcleo de un cable coaxial como el de la Fig. 2.3, considerando diferentes profundidades de ubicación del cable.



a)



b)



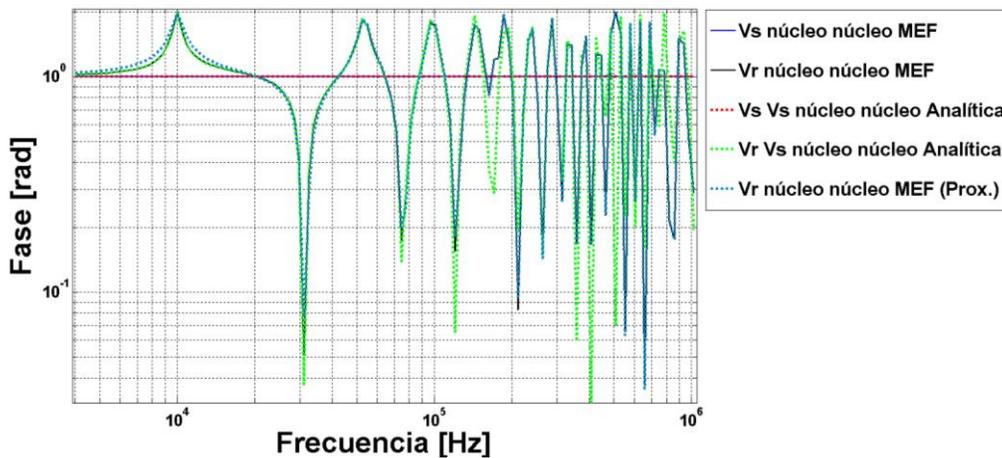
c)

Fig. 4.17. Espectro de frecuencia en la magnitud de la tensión en la impedancia propia del núcleo Z_{N_N} en ambos extremos del cable, sin y tomando en cuenta el efecto de proximidad de conductores, a una profundidad de: **a)** 0.7620 m, **b)** 10 m y **c)** 40 m.

De las distintas gráficas de la Fig. 4.17 se tiene que, para un intervalo del orden de 10^5 Hz y superior, la amplitud del espectro de frecuencia con los parámetros obtenidos del MEF varía respecto al de las formulaciones analíticas a medida que el cable está más cercano al plano de tierra. Esto se debe principalmente a que las aproximaciones analíticas consideran una distribución uniforme de la corriente en el suelo para cualquier frecuencia. En realidad, esta distribución es función de la frecuencia y se concentra alrededor del cable en forma de campana, como se puede apreciar en la Fig. 3.5; de esta manera, mientras menos profundo se encuentre el cable respecto al suelo sus parámetros se verán más afectados por la corriente de retorno por tierra.

4.5.2 Espectro de frecuencia de fase en la impedancia propia del núcleo (Z_{N_N}).

Las gráficas de la Fig. 4.18 corresponden a los espectros de frecuencia de fase de la impedancia serie propia del núcleo de un cable coaxial como el de la Fig. 2.3.



a)

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

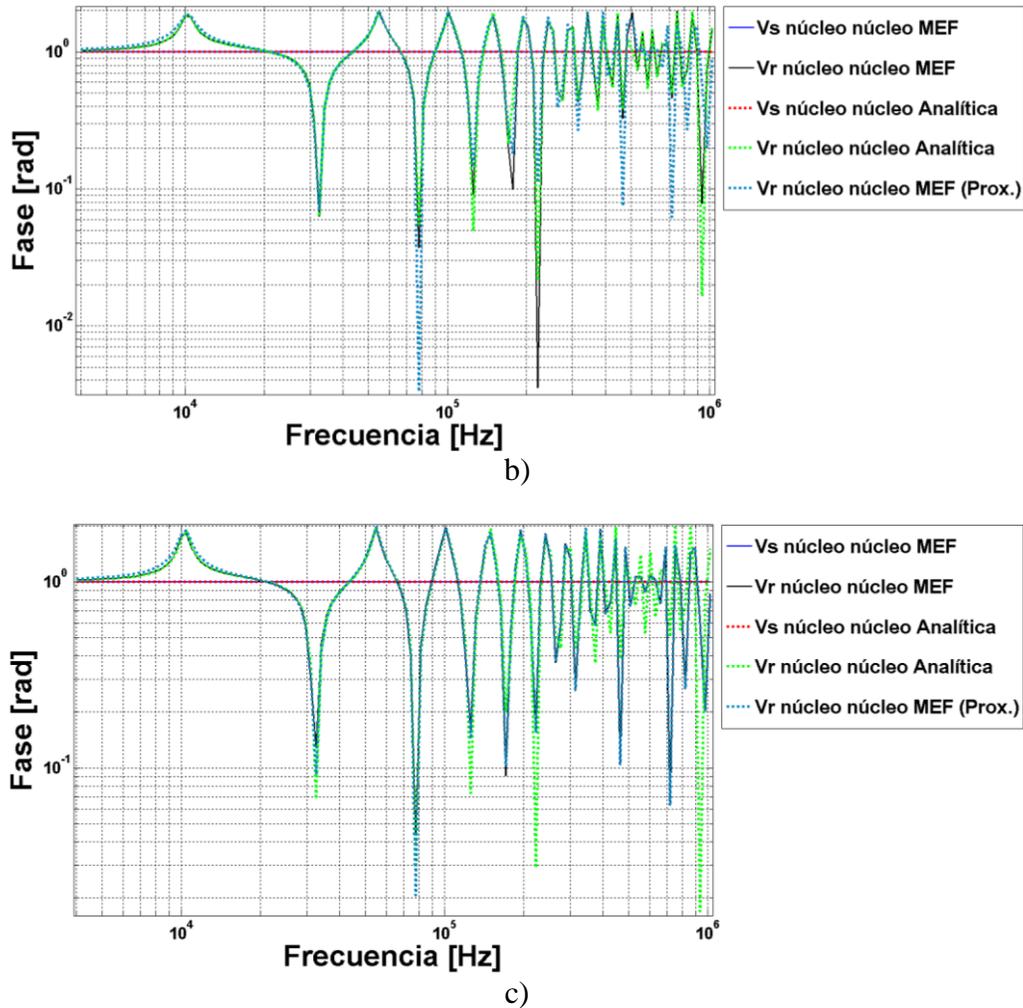


Fig. 4.18. Espectro de frecuencia de fase en la impedancia propia del núcleo $Z_{N,N}$ en ambos extremos del cable, sin y tomando en cuenta el efecto de proximidad de conductores, a una profundidad de: a) 0.7620 m, b) 10 m y c) 40 m.

En las distintas gráficas de la Fig. 4.18, no existe un patrón que dicte el comportamiento de las respuestas en frecuencia del extremo emisor del cable. Sin embargo, se puede observar que la respuesta obtenida con los parámetros de las aproximaciones analíticas y el MEF sin tomar en cuenta la cercanía de conductores vecinos es muy similar a bajas frecuencias mientras que para altas frecuencias esta última tiende a parecerse más a la respuesta que se obtiene mediante MEF en presencia de conductores vecinos.

4.5.3 Espectro de frecuencia de tensión en la impedancia mutua del núcleo y blindaje ($Z_{N,B}$).

Las gráficas de la Fig. 4.19 corresponden a los espectros de frecuencia de tensión de la impedancia serie mutua del núcleo y la pantalla metálica de un cable coaxial como el de la Fig. 2.3.

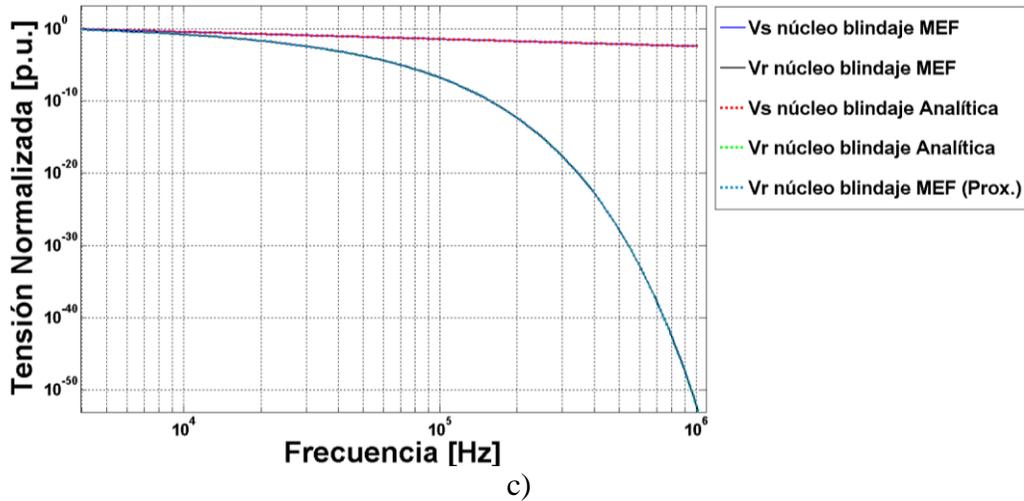
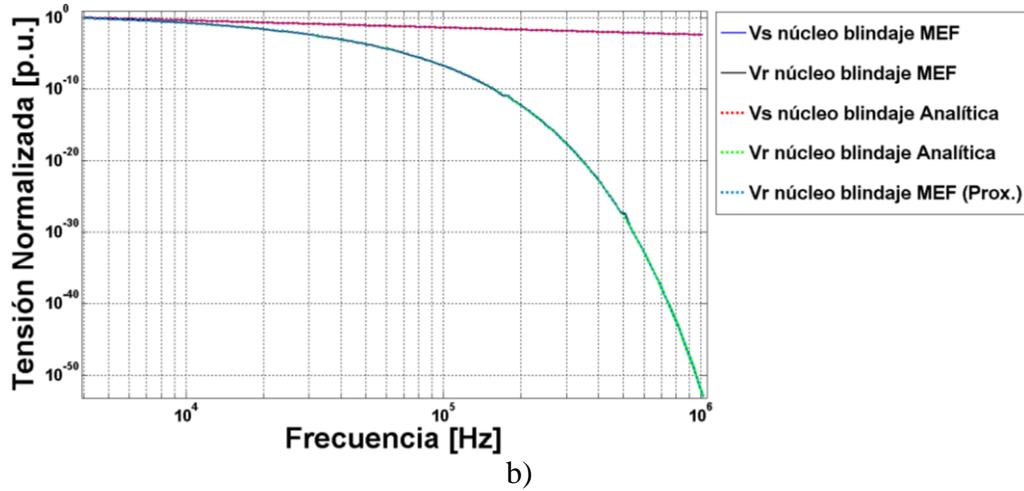
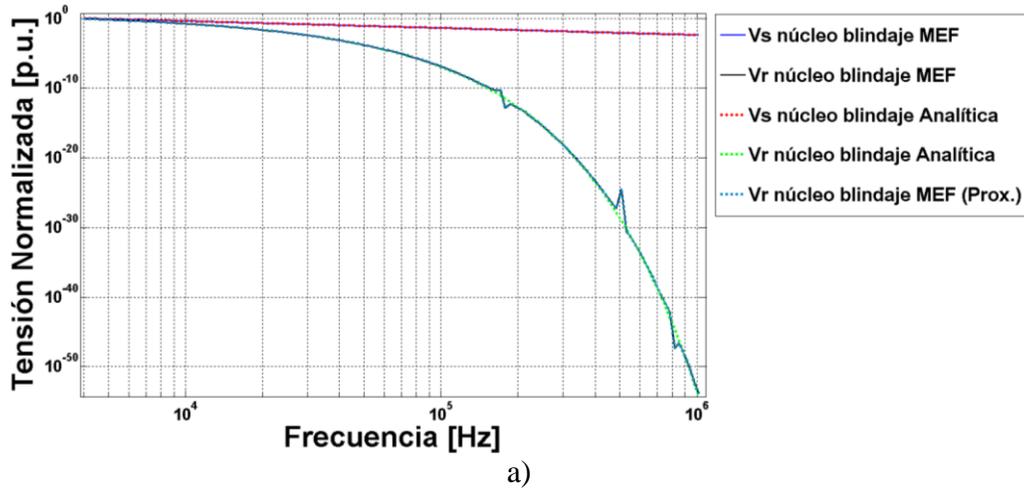
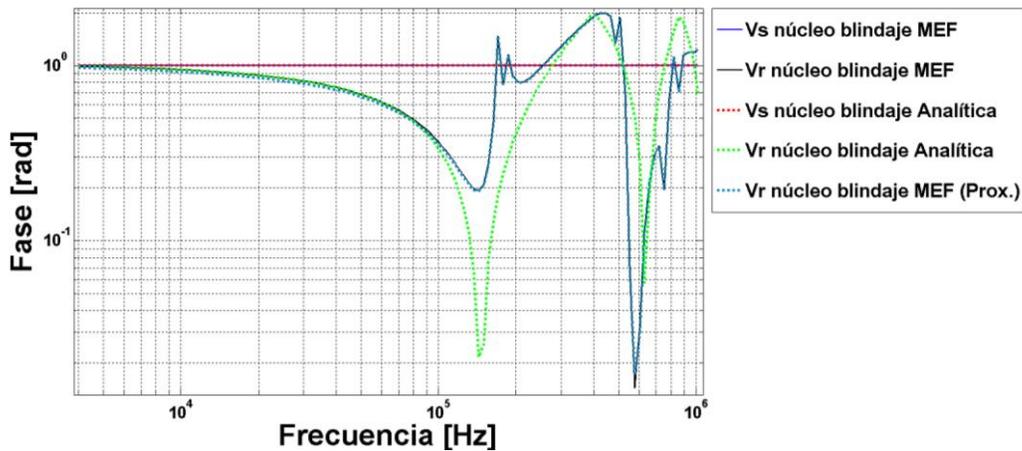


Fig. 4.19. Espectro de frecuencia en la magnitud de la tensión en la impedancia mutua del núcleo y blindaje Z_{N_B} en ambos extremos del cable, sin y tomando en cuenta el efecto de proximidad de conductores, a una profundidad de: a) 0.7620 m, b) 10 m y c) 40 m.

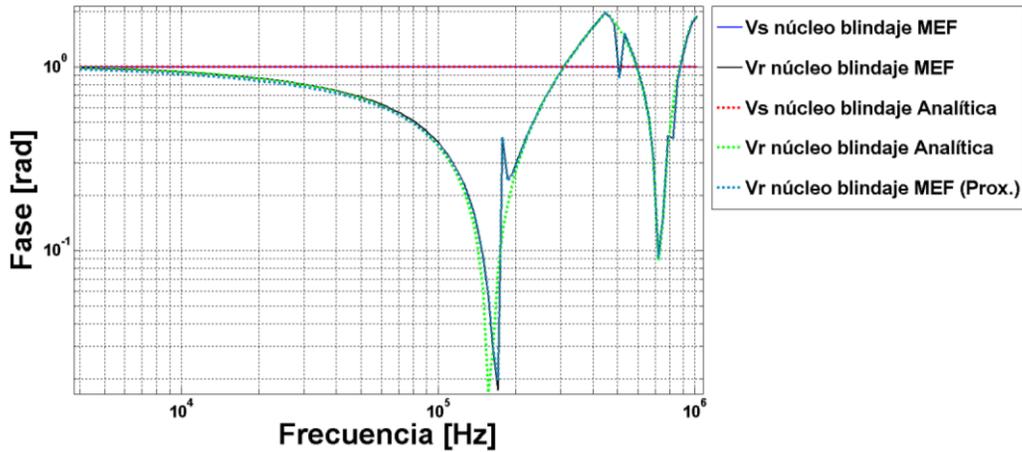
De las distintas gráficas de la Fig. 4.19, se observan pequeñas diferencias en la amplitud del espectro de frecuencia para valores por encima de 10^5 Hz con los parámetros obtenidos del MEF al incluir el efecto de proximidad, respecto a los resultados de las fórmulas analíticas (que no incluyen este efecto). Estas diferencias son más apreciables a medida que el cable se encuentra más cercano al plano de tierra. Sin embargo, las respuestas de MEF y formulaciones analíticas son prácticamente iguales cuando se desprecia el efecto de proximidad en MEF.

4.5.4 Espectro de frecuencia de fase en la impedancia mutua del núcleo y blindaje (Z_{N_B}).

Las gráficas de las Fig. 4.20 corresponden a los espectros de frecuencia de fase de la impedancia serie mutua del núcleo y la pantalla metálica de un cable coaxial como el de la Fig. 2.3.



a)



b)

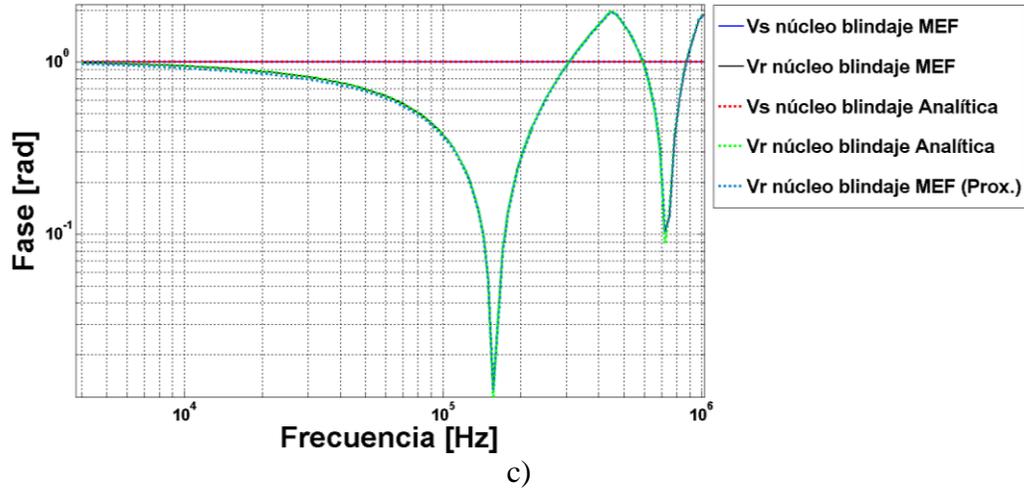


Fig. 4.20. Espectro de frecuencia de fase en la impedancia mutua entre núcleo y blindaje $Z_{N,B}$ en ambos extremos del cable, sin y tomando en cuenta el efecto de proximidad de conductores, a una profundidad de: **a)** 0.7620 m, **b)** 10 m y **c)** 40 m.

De las distintas gráficas de la Fig. 4.20, se tiene un comportamiento similar a los casos anteriores: a frecuencias por debajo de 10^5 Hz se tiene un comportamiento similar en las respuestas de frecuencia por cualquiera de los métodos de obtención de los parámetros: MEF o aproximaciones analíticas, mientras que a frecuencias mayores se presentan diferencias que se van reduciendo a medida que el cable se encuentra a una mayor profundidad respecto al plano de tierra.

En este capítulo se ha validado el modelo de dos puertos en el dominio de la frecuencia desarrollado a través de su comparación con las respuestas transitorias de tensión en el dominio del tiempo del paquete computacional PSCAD/EMTDC®. Esto se ha llevado a cabo para el cable coaxial de la Fig. 2.3, tomando en cuenta algunos otros factores como la inclusión de capas semiconductoras al cable para diferentes métodos de aterrizamiento de las pantallas metálicas en condición de vacío.

Una vez validado el modelo en la frecuencia se han obtenido los espectros de frecuencia en amplitud y fase de la impedancia propia del núcleo ($Z_{N,N}$) e impedancia mutua del núcleo con el blindaje ($Z_{N,B}$), con los parámetros calculados de aproximaciones analíticas y del MEF. En este último caso los cálculos se han realizado para dos condiciones: tomando en cuenta el efecto de inducción de conductores próximos y sin considerar este efecto, tal como lo suponen las aproximaciones analíticas.

En general, se observó que a valores por debajo de 10^5 Hz las respuestas en frecuencia por cualquiera de los métodos (MEF y aproximaciones analíticas) son similares. Por otro lado, al considerar la presencia de conductores vecinos en el MEF se presentan menores resonancias, lo cual indica que las aproximaciones analíticas sobreestiman estas magnitudes. Por otro lado, a frecuencia por arriba de este intervalo se presentan diferencias notables de las aproximaciones analíticas respecto a ambas condiciones del MEF.

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

CAPÍTULO 5. Conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros.

5.1 Conclusiones.

Esta sección puede dividirse en dos partes:

Conclusiones del cálculo de los parámetros de impedancia serie $Z(\omega)$ y admitancia en derivación Y usando el Método del Elemento Finito (MEF).

Se comprueba que el MEF, combinado con el método de la impedancia compleja y el método de la energía, es un enfoque confiable para la determinación de los parámetros de impedancia serie. Esta metodología se compara con el procedimiento de cálculo de los parámetros empleando las formulaciones analíticas para un intervalo de frecuencias de 60 Hz a 1 MHz, donde se verifica que las aproximaciones analíticas son una buena aproximación a frecuencias iguales o mayores a 1 kHz.

En el cálculo de $Z(\omega)$ la diferencia relativa entre el método de la energía y el método de la impedancia compleja es menor al 5.5% en el peor de los casos (véase Tabla 3.10). Sin embargo, el método de la energía (W_m y R) requiere de la solución de los campos cuasi estacionarios para posteriormente construir la matriz de impedancia serie generalizada, lo que suele ser complicado y demanda un mayor tiempo de cómputo. Por el contrario, con el método de la impedancia compleja (Z_{com}) el cálculo de parámetros se obtiene de manera directa, siendo éste el argumento principal para su posterior comparación con las formulas analíticas, en donde en todos los casos la diferencia relativa es menor al 5.3% (véase Tabla 3.11).

En las primeras simulaciones se considera que el campo magnético se encuentra confinado al lazo 1 (ver Fig. 3.7a) y al lazo 2, (ver Fig. 3.7b) respectivamente, y que el flujo magnético no penetra a los conductores vecinos, tal como lo suponen las aproximaciones analíticas. Sin embargo, en realidad este flujo magnético alcanza a los conductores vecinos. Esto se ilustra en las simulaciones obtenidas en las Figs. 3.8a y 3.8b.

Por otro lado, la diferencia relativa entre fórmulas analíticas y el MEF es mayor a la menor frecuencia de 60 Hz (véase Tabla 3.12). Esto se puede atribuir a que las fórmulas analíticas fueron desarrolladas para análisis transitorio de alta frecuencia.

En cuanto al cálculo de la matriz de capacitancias C , la diferencia relativa entre el MEF y la aproximación analítica para un cable coaxial sin capa semiconductor es menor al 0.15% en el peor caso (véase Tabla 3.13). Sin embargo, con el método analítico el usuario debe construir la matriz de admitancia en derivación, lo que al igual que para la impedancia serie es tedioso y requiere un mayor esfuerzo. Tomando en cuenta que la diferencia relativa es mínima entre ambos métodos, el siguiente paso consistió en determinar la diferencia relativa de C para un cable coaxial sin y con la inclusión de capas semiconductoras. En este caso la diferencia relativa es menor al 7.6% para el peor caso (véase Tabla 3.14).

En los resultados de las Tablas 3.11 y 3.13 las diferencias relativas del MEF respecto a las aproximaciones analíticas para $\mathbf{R}(\omega)$, $\mathbf{L}(\omega)$ y \mathbf{C} en el peor de los casos es menor a 5.3%, 1.5% y 0.20% respectivamente. Las diferencias mayores se atribuyen principalmente a las corrientes de retorno por tierra, recordando que las aproximaciones analíticas establecen que ésta se concentra de manera uniforme sobre un plano ficticio semi-infinito. Como se observa en la Fig. 3.5, esto no es así, sino que la distribución se asemeja más a una forma de campana. Además, el cálculo de parámetros mediante fórmulas analíticas se realiza sin tener en cuenta la presencia de conductores vecinos. Si consideramos este aspecto al realizar cálculos mediante MEF, se presentan diferencias notables respecto a las fórmulas analíticas a frecuencias menores o iguales a 10 kHz (véase Tabla 3.12).

Si bien es cierto que hay una forma exacta para el cálculo de la impedancia de retorno por tierra mediante la fórmula de Pollaczek, ésta requiere la evaluación de una integral infinita compleja, lo cual es muy difícil por su naturaleza inestable y su tendencia a divergir. Por lo tanto, en este trabajo se empleó la formulación de Saad *et al.* para su comparación con el MEF con resultados muy similares, con una diferencia relativa tanto para la inductancia como para la resistencia menor al 2.9% en el peor de los casos (véase Tabla 3.8), a excepción del cálculo de la resistencia de 60 Hz, con una diferencia relativa del 24.2%, lo cual se debe principalmente a que las aproximaciones analíticas fueron desarrolladas para transitorios de alta frecuencia.

Conclusiones respecto al modelo desarrollado en el dominio de la frecuencia.

El modelo desarrollado de línea de transmisión en el dominio de la frecuencia para simulación de transitorios electromagnéticos es capaz de tomar en cuenta la dependencia frecuencial de los parámetros y parte de la teoría del análisis modal mediante una red de dos puertos. Adicionalmente, el modelo emplea la herramienta de la TNIL para obtener las respuestas transitorias. Los resultados obtenidos muestran que este modelo es muy efectivo debido a que se validó mediante comparaciones con resultados obtenidos de modelos en el dominio del tiempo del software comercial PSCAD/EMTDC®.

Una vez validado, el modelo fue empleado para determinar los espectros de frecuencia de un cable tomando como datos de entrada los parámetros obtenidos de las simulaciones numéricas empleando el paquete computacional COMSOL Multiphysics 4.4®. El cálculo de los parámetros se obtuvo de dos maneras: En la primera el campo magnético se encuentra confinado en el lazo donde está circulando la corriente de excitación, por lo que en ningún instante el flujo magnético penetra a conductores vecinos, tal como lo suponen las formulaciones analíticas. La segunda manera es suponer que el campo magnético del lazo excitado penetra en conductores vecinos por efecto de proximidad, y es aquí donde se visualizan diferencias notables, sobre todo relacionadas a las frecuencias de resonancia, ya que bajo esta condición suelen ser de menor magnitud a bajas frecuencias. Lo anterior se puede atribuir a una disminución del flujo magnético como consecuencia de corrientes inducidas que contrarrestan el flujo magnético principal.

Por último, se listan las ventajas y desventajas de cada método.

Método Numérico: Regla Trapezoidal con método de Bergeron (PSCAD/EMTDC®).

Ventajas

1. Costos relativamente bajos para adquirir licencias en comparación a paquetes computacionales basado en el MEF (es posible recurrir a programas libres como EMTP/ATP®).
2. Tiempos de simulación cortos.

Desventajas

1. No es tan sencillo representar e incluir en el cálculo de los parámetros los efectos del trenzado del núcleo, del alambre del blindaje, de las capas semiconductoras, de las pérdidas en el aislamiento etc.
2. No considera el efecto de proximidad en los conductores.

Método Numérico: MEF (COMSOL Multiphysics®)

Ventajas

1. Se pueden obtener los parámetros de cualquier tipo de geometría de cable.
2. Se pueden incluir un factor de pérdidas en el conductor, aislamiento, así como el efecto piel y proximidad.

Desventajas

1. Se requiere de mallados muy finos a altas frecuencias (más de 1 MHz) para obtener buenos resultados.
2. Casi siempre la compra de licencias en la mayoría de programas de simulación de MEF tienen un costo elevado.
3. Es indispensable contar con hardware muy potente y de reciente adquisición debido al elevado tiempo computacional y uso de memoria en la simulación.

5.2 Aportaciones.

Se ha establecido una metodología general para el cálculo de los parámetros eléctricos de cables coaxiales empleando el MEF para la solución de los campos electromagnéticos. Con el procedimiento descrito en este trabajo es posible evaluar estructuras más complicadas de cables independientemente de la disposición en el suelo (trincheras, suelos multicapas, etc.). En el caso de cables coaxiales, se ha verificado que las fórmulas analíticas son una

buena aproximación para el cálculo de los parámetros principalmente a frecuencias iguales o mayores a 1 kHz.

Las resistencias en conductores se obtuvieron de las pérdidas eléctricas, mientras que las inductancias y capacitancias se obtuvieron de la energía electromagnética almacenada en el sistema. Un método más eficaz permitió determinar los parámetros de impedancia serie de una manera más sencilla al relacionar la caída de potencial y la corriente en un conductor, método que a lo largo de este trabajo se le denominó “método de la impedancia compleja”. Para el cálculo de la capacitancia se empleó el método de la carga a través de la herramienta conocida como “puertos” en el paquete computacional COMSOL Multiphysics4.4®.

El modelo implementado en la frecuencia permite calcular las sobretensiones transitorias en los extremos del cable al aplicar la transformada numérica de Laplace inversa (TNLI). Debido a que se trabaja en el dominio de la frecuencia, se incluye de manera natural la dependencia de la frecuencia de los parámetros. El modelo ha sido validado mediante comparaciones con simulaciones realizadas en PSCAD-EMTDC®, con resultados muy similares.

5.3 Recomendaciones para trabajos futuros.

Las siguientes recomendaciones y mejoras pueden ser aplicadas a trabajos futuros para ampliar el alcance y contenido de este trabajo:

- Enlazar COMSOL Multiphysics® con la interfaz de trabajo de MatLab®, con el propósito de definir y manipular las características de simulación como: geometría, física, mallado, etc. de arreglos más complejos de cables subterráneos, por ejemplo: cables submarinos, umbilicales, sector circular, tipo tubo, etc., que requieren de un mayor número de iteraciones para el cálculo de los parámetros de impedancia serie y admitancia en derivación.
- Incluir no linealidades al modelo desarrollado en la frecuencia, como es el caso de la apertura o cierre secuencial de interruptores.
- Interpolar los parámetros calculados del MEF al plano complejo ($s = c + j\omega$) con la técnica del “Vector Fitting”, para ser usados como datos de entrada al modelo desarrollado, ya que el cálculo numérico de estos parámetros se realiza en el eje imaginario, es decir, para $s = j\omega$. Cabe mencionar que esto no es exclusivo de cables, sino que puede ser aplicado a otros elementos del SEP, como líneas aéreas, devanados de transformadores, etc.
- Comparar las sobretensiones transitorias de los parámetros calculados con el MEF con aquellos de las aproximaciones analíticas, para lo cual primero se debe tener éxito en el punto anterior.

- Calcular los parámetros de geometrías más complejas de cables: tipo tubo, cables con forma sector circular, barras, etc., instalados en charolas, ductos, registros, tomando en cuenta los estratos del suelo bajo diferentes propiedades electromagnéticas
- Validar el modelo implementado con pruebas experimentales, principalmente para analizar el efecto de las capas semiconductoras, la dependencia frecuencial de la capacitancia para frecuencias en el orden de los MHz, así como las pérdidas dieléctricas en los aislamientos.

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

Referencias.

- [1] A. Ametani, «The history and recent trends of transient analysis in transmission lines,» *Proceedings of International Conference on Power System Transients (IPST)*, Vancouver, British Columbia, Canada, Julio, 2013.
- [2] F. A. Uribe, J. L. Naredo, P. Moreno y L. Guardado, «Electromagnetic transients in underground transmission systems through the numerical Laplace transform,» *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 24, págs. 215-221, Marzo 2002.
- [3] D. Camargo, «Localización de fallas en cables subterráneos mediante el método de reflectometría en el dominio del tiempo (TDR),» *Tesis de Licenciatura en Ing. Eléctrica, ESIME Zacatenco, IPN*, México D.F., México, Diciembre 2012.
- [4] H. Shahnoor, «Electromagnetic full wave modal analysis of frequency-dependent underground cables,» *Thesis Master Science, Department of Electrical and Computer Engineering University of Manitoba, Winnipeg, Manitoba, Canada*, Abril 2011.
- [5] A. W. Cirino, H. de Paula, R. C. Mesquita y E. Saraiva, «Cable parameter variation due to skin and proximity effects: Determination by means of Finite Element Analysis,» *35th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics Society (IECON)*, págs. 4073-4079, Porto, Portugal, Noviembre 2009.
- [6] J. Martínez-Velásco, F. de León, P. Gómez y M. Rioual, *Power Systems Transients: Parameter Determination*, Boca Ratón FL: CRC Press, 2009.
- [7] A. Semlyen y A. Dabuleanu, «Fast and accurate switching transient calculations on transmission lines with ground return using recursive convolutions,» *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 94, nº 2, págs. 561-571, Marzo 1975.
- [8] J. R. Martí, «Accurate modelling of frequency-dependent transmission lines in electromagnetic transient simulations,» *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 101, nº 1, págs. 147-157, Enero 1982.
- [9] L. Martí, «Simulation of transients in underground cables with frequency-dependent modal

transformation matrices,» *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 3, nº 3, págs. 1099-1110, Julio 1988.

- [10] T. Noda, N. Nagaoka y A. Ametani, «Phase domain modeling of frequency-dependent transmission lines by means of an ARMA model,» *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 11, nº 1, págs. 401-411, Enero 1996.
- [11] A. Morched, B. Gustavsen y M. Tartibi, «A universal model for accurate calculation of electromagnetic transients on overhead lines and underground cables,» *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 14, nº 3, págs. 1032-1038, Julio 1999.
- [12] G. K. Papagiannis, D. A. Tsiamitros, G. T. Andreou, D. P. Labridis y P. S. Dokopoulos, «Earth return path impedances of underground cables for the multi-layer case: a finite element approach,» *IEEE Power Tech Conference Proceedings*, vol. 3, pág. 7, Bologna, Italy, Junio 2003.
- [13] D. A. Tsiamitros, G. C. Christoforidis., G. K. Papagiannis, D. P. Labridis y P. S. Dokopoulos, «Earth conduction effects in systems of overhead and underground conductors in multilayered soils,» *IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, vol. 153, nº 3, págs. 291-299, Mayo 2006.
- [14] A. I. Chrysochos, C. G. Kaloudas, T. A. Papadopoulos y G. K. Papagiannis, «On the use of the finite conductor length approach for the calculation of electromagnetic transients in overhead transmission lines,» *IEEE Grenoble PowerTech*, págs. 1-6, Grenoble, France, Junio 2013.
- [15] T. F.R.D Martins, A. C.S. Lima y S. Carneiro, «Effect of approximate impedance formulae on the accuracy of transmission line modelling,» *IET Generation, Transmission & Distribution*, vol. 1, nº 4, págs. 534-539, Julio 2007.
- [16] P. J. Nahin, Oliver Heaviside: The life, work, and times of an electrical genius of the victorian age, Baltimore, Maryland: Johns Hopkins University Press, 2002.
- [17] L. V. Bewly, Travelling-waves on transmission systems, 2da. ed., Nueva York: Wiley, 1951.
- [18] H. B. Thoren y K. L. Carlsson, «A digital computer program for the calculation of switching and lightning surges on power systems,» *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 89, nº 2, págs. 212-218, Febrero 1970.
- [19] H. W. Dommel, Electromagnetic transients program reference manual (EMTP theory book),

Bonneville Power Administration, Portland, OR, U.S.A., 1986.

- [20] R. Rudenberg, *Transient performance of power systems*, McGraw Hill, 1950. (MIT Press, 1969).
- [21] S. A. Schelkunoff, «The electromagnetic theory of coaxial transmission lines and cylindrical shields,» *The Bell System Technical Journal*, vol. 13, págs. 532-579, Octubre 1934.
- [22] F. Pollaczek, «Über das Feld einer unendlich langen wechsellängigen stromdurchflossenen Einfachleitung,» *Elektrische Nachrichten Technik*, vol. 3, nº 9, págs. 339-360, Julio 1926.
- [23] J. R. Carson, «Wave propagation in overhead wires with ground return,» *The Bell System Technical Journal*, vol. 5, nº 4, págs. 539-554, Octubre 1926.
- [24] W. H. Wise, «Potential coefficients for ground return circuits,» *The Bell System Technical Journal*, vol. 27, nº 2, págs. 365-371, Abril 1948.
- [25] J. K. Snelson, «Propagation of travelling waves on transmission lines - frequency dependent parameters,» *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 91, nº 1, págs. 85-91, Enero 1972.
- [26] W. S. Meyer y H. W. Dommel, «Numerical modeling of frequency - dependent transmission line parameters in an electromagnetic transients program,» *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 93, nº 5, págs. 1401-1409, Septiembre 1974.
- [27] F. J. Marcano y J. R. Martí, «Idempotent line model: case studies,» *Proceedings of the International Conference on Power System Transients*, págs. 67-72, Seattle, Washington, Junio 1997.
- [28] B. Gustavsen y A. Semlyen, «Combined phase and modal domain calculation of transmission line transients based on vector fitting,» *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 13, nº 2, págs. 596-604, Abril 1998.
- [29] S. J. Day, N. Mullineux y J. R. Reed, «Developments in obtaining transient response using Fourier integrals. Part I: Gibbs phenomena and Fourier integrals,» *International Journal of Electrical Engineering Education*, vol. 3, págs. 501-506, 1965.
- [30] S. J. Day, N. Mullineux y J. R. Reed, «Developments in obtaining transient response using Fourier integrals. Part II: Use of the modified Fourier transform,» *International Journal of Electrical Engineering Education*, vol. 4, págs. 31-40, 1966.

- [31] A. Ametani y K. Imanishi, «Development of exponential Fourier transform and its application to electrical transients,» *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 126, nº 1, págs. 51-56, Enero 1979.
- [32] L. M. Wedepohl y S. E. T. Mohamed, «Multiconductor transmission lines. Theory of natural modes and Fourier integral applied to transient analysis,» *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 116, nº 9, págs. 1553-1563, Septiembre 1969.
- [33] L. M. Wedepohl y D. J. Wilcox, «Transient analysis of underground power transmission systems. System-model and wave propagation characteristics,» *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 120, nº 2, págs. 253-260, Febrero 1973.
- [34] A. Ametani, «The application of fast Fourier transform to electrical transient phenomena,» *International Journal of Electrical Engineering Education*, vol. 10, nº 4, págs. 277-287, 1973.
- [35] J. W. Cooley y J. W. Tukey, «An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series,» *Mathematics of Computation*, vol. 19, nº 90, págs. 297-301, Abril 1965.
- [36] D. J. Wilcox, «Numerical Laplace transformation and inversion,» *International Journal of Electrical Engineering Education*, vol. 15, nº 3, págs. 247-265, 1978.
- [37] N. Nagaoka y A. Ametani, «A development of a generalized frequency-domain transient program – FTP,» *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 3, nº 4, págs. 1996-2004, Octubre 1988.
- [38] P. Moreno, P. Gómez, J. L. Naredo y J. L. Guardado, «Frequency domain transient analysis of electrical networks including non-linear conditions,» *ELSEVIER Int. Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 27, nº 2, págs. 139-146, Febrero 2005.
- [39] P. Gómez y F. A. Uribe, «The numerical Laplace transform: an accurate tool for analyzing electromagnetic transients on power system devices,» *ELSEVIER Int. Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 31, nº 2-3, págs. 116-123, Febrero-Marzo 2009.
- [40] P. Gómez y F. A. Uribe, «On the application of the numerical Laplace transform for accurate electromagnetic transient Analysis,» *Revista Mexicana de Física*, vol. 53, nº 3, págs. 198-204, Junio 2007.
- [41] R. Nuricumbo-Guillén, P. Gómez, F. P. Espino-Cortés y F. A. Uribe, «Accurate computation of

- transient profiles along multiconductor transmission systems by means of the numerical Laplace transform,» *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 29, nº 5, págs. 2385-2393, Octubre 2014.
- [42] A. Pagnetti, A. Xemard, F. Paladian y C. A. Nucci, «An improved method for the calculation of the internal impedances of solid and hollow conductors with the inclusion of proximity effect,» *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 27, nº 4, págs. 2063-2072, Octubre 2012.
- [43] D. A. Tsiमितros, G. K. Papagiannis, D. P. Labridis y P. S. Dokopoulos, «Earth return path impedances of underground cables for the two-layer earth case,» *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 20, nº 3, págs. 2174-2181, Julio 2005.
- [44] R. Iracheta Cortez, «Modelado electromagnético en cables subterráneos,» *Ingenierias*, vol. XII, nº 44, págs. 59-66, Julio-Septiembre 2009.
- [45] J. C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, The Clarendon Press, Oxford, 1904.
- [46] G. W. Brown y R. G. Rocamora, «Surge propagation in three-phase pipe-type cables. Part I - Unsaturated pipe,» *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 95, nº 1, págs. 89-95, Enero 1976.
- [47] C. Gary, «Approche complète de la propagation multifilaire en haute fréquence par utilisation des matrices complexes,» *EDF - Bull. Direction des Études et Rech.*, nº 3/4, págs. 5-20, 1976.
- [48] A. Ametani, «A general formulation of impedance and admittance of cables,» *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 99, nº 3, págs. 902-910, Mayo 1980.
- [49] O. Saad, G. Gaba y M. Giroux, «A closed-form approximation for ground return impedance of underground cables,» *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 11, nº 3, págs. 1536-1545, Julio 1996.
- [50] F. A. Uribe, «Accurate modeling of underground cable earth impedances for electromagnetic transients,» *IEEE Power Engineering Society General Meeting*, vol. 1, págs. 1-6, Montreal, Québec, Canada, Junio 2006.
- [51] T. T. Nguyen, «Earth-return path impedances of underground cables. II. Evaluations using neural networks,» *IEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution*, vol.

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

145, nº 6, págs. 627-633, Noviembre 1998.

- [52] F. A. Uribe, J. L. Naredo, P. Moreno y L. Guardado, «Calculating earth return impedances for underground transmission,» *Proceedings of International Conference on Power System Transients*, vol. 1, págs. 13-18, Rio de Janeiro, Brazil, Junio 2001.
- [53] J. Weiss y Z. J. Csendes, «A one-step finite element method for multiconductor skin effects problems,» *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 101, nº 10, págs. 3796-3803, Octubre 1982.
- [54] J. Weiss, V. K. Garg y E. Sternheim, «Eddy current loss calculation in multiconductor systems,» *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 19, nº 5, págs. 2207-2209, Septiembre 1983.
- [55] S. Cristina y M. Feliziani, «A finite element technique for multiconductor cable parameters calculation,» *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 25, nº 4, págs. 2986-2988, Julio 1989.
- [56] Y. Yin y H. W. Dommel, «Calculation of frequency-dependent impedances of underground power cables with finite element method,» *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 25, nº 4, págs. 3025-3027, Julio 1989.
- [57] A. Darcherif, A. Raizer, G. Meunier, J. F. Imhoff y J. C. Sabonnadiere, «New techniques in FEM field calculation applied to power cable characteristics computation,» *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 26, nº 5, págs. 2388-2390, Septiembre 1990.
- [58] G. K. Papagiannis, D. G. Triantafyllidis y D. P. Labridis, «A one-step finite element formulation for the modelling of single and double circuit transmission lines,» *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 15, nº 1, págs. 33-38, Febrero 2000.
- [59] J. Zamudio, «Modelado de cables para transitorios electromagnéticos,» *Tesis de Maestría en Ciencias en Ing. Eléctrica, SEPI ESIME Zacatenco, IPN*, págs. 1-332, México D.F., México, 1988.
- [60] R. Adame, «Cálculo de transitorios electromagnéticos para cables en el dominio de fase,» *Tesis de Maestría en Ciencias en Ing. Eléctrica, SEPI ESIME Zacatenco, IPN*, México D.F., México 1998.
- [61] C. Guerra, «Análisis de los esfuerzos eléctrico y térmico en empalmes de cable de media tensión alimentados con tensiones no sinusoidales,» *Tesis de Maestría en Ciencias en Ing. Eléctrica, SEPI ESIME Zacatenco, IPN*, págs. 1-100, México D.F., México, Junio,

2010.

- [62] B. Gustavsen, J. A. Martinez y D. Durbak, «Parameter determination for modeling system transients - Part II: Insulated cables,» *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 20, nº 3, págs. 2045-2050, Julio 2005.
- [63] F. de León, Manual de teoría electromagnética, apuntes de la sección de estudio de posgrado de ingeniería eléctrica SEPI ESIME Zacatenco, México, D.F..
- [64] COMSOL, «COMSOL Multiphysics 4.4 Reference Guide,» 2013.
- [65] Y. Yin, «Calculation of frequency-dependent parameters of underground power cables with finite element method,» *Ph.D. dissertation, Univ. British Columbia, Vancouver, Canada*, Septiembre 1990.
- [66] F. F. da Silva y C. L. Bak, *Electromagnetic transients in power cables*, Springer-Verlag, London, 2013.
- [67] A. Ametani, Y. Miyamoto y N. Nagaoka, «Semiconducting layer impedance and its effect on cable wave-propagation and transient characteristics,» *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 19, nº 4, págs. 1523-1531, Octubre 2004.
- [68] K. Steinbrich, «Influence of semiconducting layers on the attenuation behaviour of single-core power cables,» *IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, vol. 152, nº 2, págs. 271-276, Marzo 2005.
- [69] J. Elwardt, «Overvoltage study on a 400 kV cable screen,» *Proceedings of European EMTP-ATP Users Group (EEUG) Meeting*, Graz, Austria, Diciembre 2003.
- [70] Y. Ting-Chung y J. R. Martí, «A robust phase-coordinate frequency-dependent underground cable model(zCable) for the EMTP,» *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 18, nº 1, págs. 189-194, Enero 2003.
- [71] «Guide for Bonding Shields and Sheaths of Single-Conductor Power Cables Rated 5 kV through 500 kV,» *IEEE Standard 575-2014*, págs. 1-83, 2014.
- [72] A. Küchler, «Hochspannungs technik Grundlagen,» Springer, Berlín, Alemania, 1997.
- [73] L. M. Wedepohl, «Power system transients: Errors incurred in the numerical inversion of the Laplace transform,» *Proceedings of the 26th Midwest Symposium on circuits and systems*, vol. 1, págs. 174-178, Puebla, Mexico, Agosto, 1983.
- [74] R. Courant, «Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations,»

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

Bull. Am. Math. Soc., vol. 49, págs. 1-23, 1943.

[75] M. Sadiku, «A simple introduction to finite element analysis of electromagnetic problems,»

IEEE Trans. Educ., vol. 32, nº 2, págs. 85-93, Mayo 1989.

[76] M. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics*, 2da. ed., CRC Press 2000.

[77] P. P. Silvester y R. L. Ferrari, *Finite elements for electrical engineers*, Cambridge: Cambridge University Press, 3er ed., 1996.

Apéndice A. Aproximaciones analíticas para el cálculo de parámetros eléctricos de cables.

A.1 Cable coaxial (XLPE).

Los cables coaxiales de aislamiento extruido están constituidos básicamente por los siguientes elementos (véase Fig. A.1.):

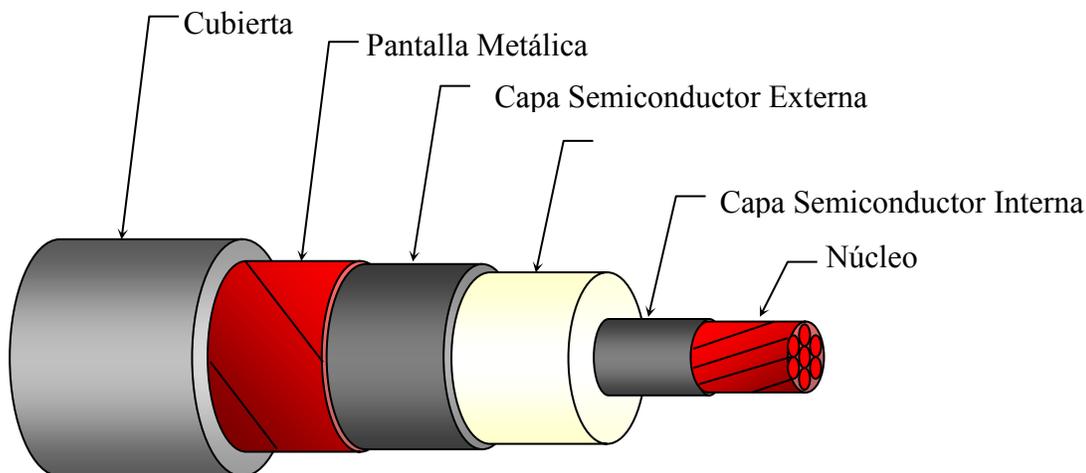


Fig. A.1. Cable XLPE 15 kV, 100% pantalla de cinta de cobre (diseño estándar).

Núcleo

Es de aluminio o cobre, pueden ser sólidos o compuestos por varios hilos (stranded), su función principal es la de transportar la corriente eléctrica en servicio normal con el mínimo de pérdidas, al igual que en condiciones de sobrecarga y corto circuito, y su tamaño está en función de la corriente que fluye por él. Además debe ser capaz de soportar los esfuerzos mecánicos durante el tendido.

Capa semiconductor interna

Comúnmente están elaboradas de polietileno de cadena cruzada (XLPE) o copolímeros de etilenos mezclados con carbón negro [70]. Su función es evitar la concentración de campo eléctrico en la interfaz del aislamiento principal y la capa semiconductor interna y garantizar un enlace equipotencial entre el conductor y el aislamiento principal, y así evitar la formación de gaps que pudiesen desencadenar descargas parciales y daños permanentes en el cable, además de mantener el campo eléctrico perfectamente radial.

Aislamiento principal

Se prefiere el uso del XLPE ya que tiene menos pérdidas dieléctricas que el EPR, su propósito es asegurar que no haya conexión eléctrica entre el conductor y la pantalla metálica y soportar los diferentes gradientes de tensión eléctrica en condiciones de estado estable y transitorio durante la vida del cable: tensión nominal, sobretensiones por maniobras y por rayo. Se distinguen dos tipos de aislamiento: el aislamiento 100% se

utiliza comúnmente para liberar fallas a tierra en un tiempo no mayor a un minuto, mientras que el aislamiento 133% para tiempos no mayores a una hora. Las capas semiconductoras interna y externa, así como el aislamiento principal, se construyen en una sola pieza de extrusión.

Capa semiconductor externa

Comúnmente están elaboradas de polietileno de cadena cruzada (XLPE) o copolímeros de etilenos mezclado con carbón negro [70]. Su función es garantizar un enlace equipotencial entre el aislamiento principal y la pantalla metálica, así como evitar la concentración del campo eléctrico en la interfaz entre el aislamiento principal y la capa semiconductor externa, y así evitar la formación de cavidades que pudiesen desencadenar descargas parciales y daños permanentes en el cable, además de mantener el campo eléctrico perfectamente radial.

Pantalla metálica (blindaje metálico)

Está compuesta por alambres de cobre, aluminio o plomo, dependiendo de la aplicación el apantallamiento del cable puede ser plomo aliado extruido, pantalla de hilos de cobre y aluminio contracolado a un tubo polietileno, pantalla de aluminio soldado y contracolado a un tubo PE, combinación hilos de cobre y tubo de plomo Su propósito es confinar el campo eléctrico en el conductor, así como un retorno de las corrientes de falla, proveer protección contra el agua, crear una distribución radial y simétrica de los esfuerzos eléctricos, proveer una capacitancia a tierra uniforme, reducir el peligro de descargas eléctricas al personal. Es común encontrar que las pantallas metálicas estén aterrizadas en un extremo del cable para evitar pérdidas por efecto Joule cuando éstas se aterrizan en ambos de sus extremos, sin embargo, el aterrizar las pantallas en un solo punto no elimina por completo las sobretensiones, por lo que en la mayoría de las ocasiones se requiere el aterrizamiento de pantallas conocido como cross-bonding.

Armadura

Consiste en un recubrimiento metálico aplicado sobre el cable inmediatamente debajo de su cubierta externa a efectos de protegerlo contra daños mecánicos provocados durante la instalación y/o en servicio (esfuerzos de tracción, impactos, roedores, etc), comúnmente se encuentra instalada en cables submarinos.

Cubierta

Proporciona protección contra los agentes mecánicos y agentes químicos externos, además de servir como aislamiento entre la pantalla metálica y el suelo, comúnmente el Cloruro de Polivinil (PVC) es utilizado como cubierta en cables de potencia.

A.2 Cálculo de parámetros de un cable coaxial (XLPE).

En esta sección se describe el procedimiento de cálculo de los parámetros eléctricos de las matrices de impedancia serie y admitancia en derivación que requieren las ecuaciones del telegrafista utilizando un enfoque matemático a través de aproximaciones analíticas. En ambas matrices los parámetros se calculan inicialmente en función de impedancias y admitancias de malla. Posteriormente, mediante un desarrollo matemático, se representan

estos parámetros en función de sus elementos: núcleo, blindaje, armadura y el suelo como referencia. El propósito de esta conversión es conocer las sobretensiones o sobrecorrientes que pudieran originarse en cada una de las capas conductoras del cable.

A.2.1 Matriz de impedancia serie.

La mayor parte de las aproximaciones analíticas fueron desarrolladas por Schelkunoff [21] o Wedepohl/Wilcox [33] y Pollaczek, para la impedancia en los conductores cilíndricos y la impedancia de retorno por tierra, respectivamente. Sin embargo, la evaluación de esta última no posee solución analítica, por lo que se prefiere la aproximación desarrollada por Saad *et al.* [49], que es precisamente la que se utiliza en esta tesis.

A continuación se presentan las aproximaciones analíticas para cada uno de los elementos que constituyen el cable coaxial de la Fig. A.2.

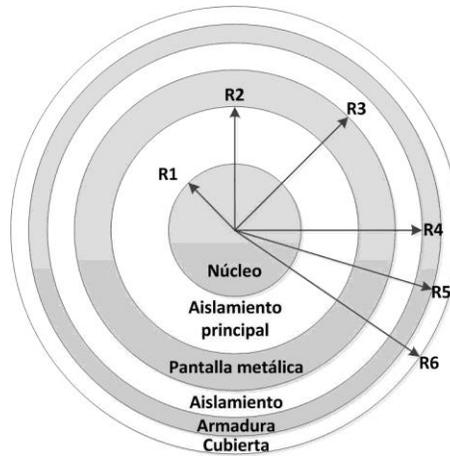


Fig. A.2. Sección transversal de un cable coaxial.

Impedancia del núcleo

Este parámetro depende de la resistividad del conductor y de la profundidad de penetración.

$$Z_{núcleo} = \frac{\rho m}{2\pi R_1} \cdot \frac{I_0(mR_1)}{I_1(mR_1)} \quad (A.1)$$

$$m = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\rho}} \quad (A.2)$$

$$Z_{núcleo} = \frac{\rho m}{2\pi R_1} \cdot \coth(0.777mR_1) + \frac{\rho}{\pi R_1^2} \left(1 - \frac{1}{2(0.777)}\right) \quad (A.3)$$

Impedancia del aislamiento principal

La impedancia en el aislamiento principal es resultado del campo magnético variante en el tiempo sobre el aislamiento interior del cable.

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

$$Z_{ais_1} = \frac{j\omega\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (A.4)$$

Impedancia interna del blindaje

Está asociada a la caída de potencial sobre la superficie interior del blindaje cuando una corriente retorna por el núcleo.

$$Z_{blindaje_int} = \frac{\rho m}{2\pi R_2} \cdot \frac{I_0(mR_2)K_1(mR_3) + K_0(mR_2)I_1(mR_3)}{I_1(mR_3)K_1(mR_2) - I_1(mR_2)K_1(mR_3)} \quad (A.5)$$

$$Z_{blindaje_int} = \frac{\rho m}{2\pi R_2} \cdot \coth(m(R_3 - R_2)) - \frac{\rho}{2\pi R_2(R_2 + R_3)} \quad (A.6)$$

Impedancia externa del blindaje

Está asociada a la caída de potencial sobre la superficie exterior del blindaje cuando una corriente regresa por la armadura.

$$Z_{blindaje_ext} = \frac{\rho m}{2\pi R_3} \cdot \frac{I_0(mR_3)K_1(mR_2) + K_0(mR_3)I_1(mR_2)}{I_1(mR_3)K_1(mR_2) - I_1(mR_2)K_1(mR_3)} \quad (A.7)$$

$$Z_{blindaje_ext} = \frac{\rho m}{2\pi R_3} \cdot \coth(m(R_3 - R_2)) + \frac{\rho}{2\pi R_3(R_2 + R_3)} \quad (A.8)$$

Impedancia del aislamiento sobre el blindaje (Bedding)

La impedancia en el aislamiento del blindaje es resultado del campo magnético variante en el tiempo sobre el aislamiento interior del cable

$$Z_{ais_2} = \frac{j\omega\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{R_4}{R_3}\right) \quad (A.9)$$

Impedancia interna de la armadura

Está asociada a la caída de potencial sobre la superficie interior de la armadura cuando una corriente retorna por el blindaje.

$$Z_{armadura_int} = \frac{\rho m}{2\pi R_4} \cdot \frac{I_0(mR_4)K_1(mR_5) + K_0(mR_4)I_1(mR_5)}{I_1(mR_5)K_1(mR_4) - I_1(mR_4)K_1(mR_5)} \quad (A.10)$$

$$Z_{armadura_int} = \frac{\rho m}{2\pi R_4} \cdot \coth(m(R_5 - R_4)) - \frac{\rho}{2\pi R_4(R_4 + R_5)} \quad (A.11)$$

Impedancia externa de la armadura

Está asociada a la caída de potencial sobre la superficie exterior de la armadura cuando una corriente regresa por el suelo.

$$Z_{armadura_ext} = \frac{\rho m}{2\pi R_5} \cdot \frac{I_0(mR_5)K_1(mR_4) + K_0(mR_5)I_1(mR_4)}{I_1(mR_5)K_1(mR_4) - I_1(mR_4)K_1(mR_5)} \quad (\text{A.12})$$

$$Z_{armadura_ext} = \frac{\rho m}{2\pi R_5} \cdot \coth(m(R_5 - R_4)) + \frac{\rho}{2\pi R_5(R_4 + R_5)} \quad (\text{A.13})$$

Impedancia de la cubierta

La impedancia en la cubierta es resultado del campo magnético variante en el tiempo sobre la propia cubierta del cable.

$$Z_{ais_2} = \frac{j\omega\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{R_6}{R_5}\right) \quad (\text{A.14})$$

Impedancia mutua en el blindaje

Está asociada a dos corrientes de lazos diferentes cuya magnitud es igual para ambos lazos, en un primer lazo hay una caída de potencial sobre la superficie exterior del blindaje cuando una corriente retorna por el núcleo y un segundo lazo donde existe una caída de potencial sobre la superficie interior del blindaje cuando retorna una corriente por la armadura.

$$Z_{blindaje_mut} = \frac{\rho}{2\pi R_2 R_3} \cdot \frac{1}{I_1(mR_3)K_1(mR_2) - I_1(mR_2)K_1(mR_3)} \quad (\text{A.15})$$

$$Z_{blindaje_mut} = \frac{\rho m}{\pi(R_2 + R_3)} \cdot \operatorname{csch}(m(R_3 - R_2)) \quad (\text{A.16})$$

Impedancia mutua en la armadura

Está asociada a dos corrientes de lazos diferentes e iguales, en un primer lazo hay una caída de potencial sobre la superficie exterior de la armadura cuando una corriente retorna por el blindaje, mientras que el segundo lazo, existe una caída de potencial sobre la superficie interior de la armadura cuando retorna una corriente por el suelo.

$$Z_{armadura_mut} = \frac{\rho}{2\pi R_4 R_5} \cdot \frac{1}{I_1(mR_5)K_1(mR_4) - I_1(mR_4)K_1(mR_5)} \quad (\text{A.17})$$

$$Z_{blindaje_mut} = \frac{\rho m}{\pi(R_4 + R_5)} \cdot \operatorname{csch}(m(R_5 - R_4)) \quad (\text{A.18})$$

Impedancia propia del suelo

La fórmula clásica desarrollada por Pollaczek.

$$Z_{suelo_propia} = \frac{\rho m^2}{2\pi} \left[K_0(mR_4) - K_0\left(m\sqrt{R_4^2 + 4h^2}\right) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2h\sqrt{m^2+\alpha^2}}}{|\alpha| + \sqrt{m^2 + \alpha^2}} e^{j\alpha R_4} d\alpha \right] \quad (A.19)$$

donde:

h es la profundidad del cable

Aproximación analítica propuesta por Saad *et al.* [49].

$$Z_{suelo_propia} = \frac{\rho m^2}{2\pi} \left[K_0(mR_4) + \frac{2}{4 + m^2 R_4^2} e^{-2hm} \right] \quad (A.20)$$

Impedancia mutua del suelo

Representa la inductancia mutua entre los cables y es el resultado de la caída de potencial en la tierra respecto a los cables adyacentes, induciendo una emf en los cables cuando la corriente retorna por el suelo.

La fórmula clásica desarrollada por Pollaczek.

$$Z_{suelo_mutua} = \frac{\rho m^2}{2\pi} \left[K_0(md) - K_0\left(m\sqrt{d^2 + (h_i - h_j)^2}\right) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(h_i+h_j)\sqrt{m^2+\alpha^2}}}{|\alpha| + \sqrt{m^2 + \alpha^2}} e^{j\alpha d} d\alpha \right] \quad (A.21)$$

donde:

d es la distancia entre los conductores

$h_{i,j}$ es la profundidad a las cual están enterrados los cables i y j

Aproximación analítica propuesta por Saad *et al.* [49].

$$Z_{suelo_mutua} = \frac{\rho m^2}{2\pi} \left[K_0(md) + \frac{2}{4 + m^2 d^2} e^{-2hm} \right] \quad (A.22)$$

A.2.2 Matriz de admitancia en derivación.

El cálculo de la matriz de admitancia es más sencillo, porque se tienen algunas simplificaciones, por ejemplo, se supone que el potencial en la pantalla metálica a lo largo del cable es casi cero, por lo tanto, se puede afirmar que el campo eléctrico se confina en cada cable y no hay acoplamientos mutuos entre las admitancias de diferentes fases.

El cálculo de las admitancias se realiza mediante las siguientes aproximaciones clásicas o de Carson.

Capacitancia en el núcleo

$$Z_{ais_1} = \frac{j\omega\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (A.23)$$

Capacitancia en el blindaje

$$C_{ais_bedding} = \frac{j\omega\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{R_4}{R_3}\right) \quad (A.24)$$

Capacitancia en la armadura

$$C_{ais_cubierta} = \frac{j\omega\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{R_6}{R_5}\right) \quad (A.25)$$

A.3 Aterrizamiento de las pantallas metálicas de cables.

En la siguiente sección se describen algunas de las metodologías de aterrizamiento de las pantallas metálicas y su aplicación con base a la longitud del cable.

El método de aterrizamiento de las pantallas metálicas resulta importante en la operación de los sistemas de cables subterráneos. Enseguida, se describen los criterios de selección de acuerdo al tipo y longitud del propio cable, así como las ventajas y limitaciones de cada uno de ellos. Respecto a los beneficios de las capas semiconductoras éstas ya fueron expuestas en la sección 3.2.

Es bien conocido, que en condiciones de estado estable la corriente circulante en el núcleo de un cable induce una diferencia de potencial en su pantalla, producto de las corrientes inducidas. Si se forma una trayectoria en los extremos de esta pantalla, hay una circulación de corriente, incrementándose las pérdidas, de aquí el interés en mantener el valor de corriente en la pantalla tan bajo como sea posible. De esta manera, y como medida de precaución las pantallas metálicas de un sistema subterráneo normalmente están aterrizadas por alguno de los siguientes métodos y su elección se debe principalmente a la longitud del cable.

- Cable Aterrizado en un Solo Punto

Este es el método más sencillo de aterrizamiento y como su nombre lo indica consiste en el aterrizamiento de la pantalla metálica en uno de los extremos del cable. Dado que no existe una trayectoria cerrada entre la pantalla metálica y el suelo, se evitan corrientes circulantes en la pantalla reduciendo pérdidas, aunque las corrientes de eddy estarán presentes, por lo que, con este sistema de aterrizamiento se tiene una mayor capacidad de conducción [71]. Sin embargo, a lo largo de la pantalla metálica aparecerán tensiones inducidas, las cuales serán proporcionales a la longitud del cable, por esta razón este método es recomendado para el aterrizamiento de líneas cortas, aunque en la literatura no se precisa con exactitud cuál es la longitud de una línea corta, algunos autores mencionan longitudes no mayor a 3 km [66].

- Cable aterrizado en ambos Puntos

En el caso de aterrizamiento de las pantallas metálicas en al menos dos extremos del cable, a diferencia del método anterior, este sistema evita la aparición de tensiones inducidas en las pantallas metálicas, reduciendo el valor de la tensión prácticamente a un valor de 0 V. Aunque también es muy común un aterrizamiento de las pantallas a la mitad de la longitud del cable, debido a que hay una distancia máxima entre dos puntos aterrizados.

La desventaja es que aparecen corrientes circulantes porque existe una trayectoria cerrada entre la pantalla y el camino de retorno a través de la tierra, produciendo efectos como la pérdida de potencia por la sobretensión que generan las corrientes a través de las pantallas, y la reducción de la ampacidad en el núcleo del cable debido a los efectos térmicos [71].

- Aterrizamiento cruzado (Crossbonding)

Este tipo de aterrizamiento consiste en dividir la longitud del cable en tres tramos iguales llamadas secciones menores, interrumpiendo la continuidad de la pantalla. Las tres secciones menores representan una sección mayor, donde las pantallas están interconectadas entre ellas y también conectadas a tierra. La longitud del cada tramo debe ser una tercera parte de la longitud de la distancia entre dos conexiones a tierra del cable. Esta técnica permite eliminar o al menos reducir las corrientes a través de las pantallas. En el caso de una formación triangular de los cables, el aterrizamiento cruzado elimina totalmente las corrientes en la pantalla, pero en caso de la formación plana aunque reduce considerablemente las corrientes a través de las pantallas, no se logra eliminar en su totalidad debido a la falta de simetría de los cables, por lo que una variante es utilizar la transposición, es decir, transponer cíclicamente los conductores de potencia en cada sección menor, con lo que es posible reducir aún más las corrientes circulantes en la pantalla metálica [71].

Apéndice B. Transformada numérica de Laplace.

B.1 Introducción.

La transformada de Laplace es de gran utilidad en diversas áreas científicas y de la ingeniería, en el campo de la ingeniería eléctrica su aplicación se fundamenta en el análisis transitorio de los sistemas de potencia, como tal es una herramienta matemática utilizada en la solución de ecuaciones diferenciales o integrales, pues transforma un problema en el dominio del tiempo en un problema en el dominio de la frecuencia, lo que implica convertir ecuaciones diferenciales a ecuaciones algebraicas las cuales suelen ser más sencillas de resolver [36], [38].

En lo referente al alcance de este trabajo la transformada inversa numérica de Laplace es la herramienta que traslada las ecuaciones originales al dominio del tiempo ya que como se ha mencionado facilita la resolución de las ecuaciones en el dominio de Laplace, sin embargo, en la mayoría de las veces en sistemas prácticos reales no es posible encontrar soluciones analíticas lo que conlleva a ser uso de algoritmos numéricos para que puedan ser evaluadas, dando lugar a errores por truncamiento y discretización [38], [39], [40].

B.2 Definición.

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ en el dominio del tiempo y su correspondiente imagen $F(s)$ en el dominio de la frecuencia está definida por:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (\text{B.1})$$

Mientras que la transformada numérica de Laplace inversa es:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c_w - j\infty}^{c_w + j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (\text{B.2})$$

Al sustituir $s = c_w + j\omega$ en (B.1) y (B.2) se tiene:

$$F(c_w + j\omega) = \int_0^{\infty} [f(t)e^{-c_w t}]e^{-j\omega t} dt \quad (\text{B.3})$$

y

$$f(t) = \frac{e^{c_w t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(c_w + j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{B.4})$$

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

En donde c_w es una constante de amortiguamiento y ω es la frecuencia angular. Cuando esta constante $c_w = 0$, la ecuación (B.4) corresponde a la transformada de Fourier.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{B.5})$$

B.3 Transformada numérica de Laplace inversa.

Para una $f(t)$ causal y real, un rango de integración finito $[0, \Omega]$ y se incorpora la función ventana $\sigma(\omega)$ a (B.4), se tienen:

$$f(t) \cong \frac{e^{c_w t}}{\pi} \text{Re} \left[\int_0^{\Omega} F(c_w + j\omega) \sigma(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \quad (\text{B.6})$$

Para $\omega = 0$, la ecuación (B.6) presenta problemas numéricos debido a que $F(j\omega)$ presenta singularidades en ese punto. Para evitarlas el rango de integración se divide en intervalos de $2\Delta\omega$ y ω se evalúa para frecuencias impares ($\Delta\omega, 3\Delta\omega, \dots$). De acuerdo a lo anterior, la ecuación (B.6) puede evaluarse numéricamente como:

$$F(n\Delta t) \cong \frac{e^{c_w t}}{\pi} \text{Re} \left[\sum_{m=0}^{N-1} F[c_w + j(2m+1)\Delta\omega] \sigma[(2m+1)\Delta\omega] e^{j(2m+1)\Delta\omega n\Delta t} \Delta\omega' \right] \quad (\text{B.7})$$

donde

$\Delta\omega$ es el paso de discretización del espectro

Δt es el paso de discretización de $f(t)$

N es el número de muestras

$n, m = 0, 1, 2, \dots, N-1$

$\Delta\omega' = 2\Delta\omega$

El periodo de observación es:

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}, \quad \Delta t = \frac{T}{N}, \quad \Delta\omega\Delta t = \frac{\pi}{N} \quad (\text{B.8})$$

La ecuación (B.7) con las consideraciones anteriores permiten emplear el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés) disminuyendo así el proceso de cómputo significativamente, siempre que el número de muestras sea $N = 2^n$, como n entero y positivo, teniéndose lo siguiente:

$$f_n = \operatorname{Re} \left[C_n \sum_{m=0}^{N-1} F_m \sigma_m \exp \left(\frac{2j\pi mn}{N} \right) \right] \quad (\text{B.9})$$

donde

$$F_m = F[c_w + j(2m + 1)\Delta\omega] \quad (\text{B.10})$$

$$f_n = f(n\Delta\omega) \quad (\text{B.11})$$

$$C_n = \frac{2\Delta\omega}{\pi} \exp(c_w n\Delta t + \frac{j\pi n}{N}) \quad (\text{B.12})$$

$$\sigma_m = \sigma[(2m + 1)\Delta\omega] \quad (\text{B.13})$$

B.4 Transformada directa.

La forma discreta de evaluar la ecuación (B.3) con un rango finito de integración es (B.14)

$$F(c_w + j(2m + 1)\Delta\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) e^{-c_w n\Delta t} e^{-j(2m+1)\Delta\omega n\Delta t} \Delta t \quad (\text{B.14})$$

Simplificando con (B.8) tenemos (B.15) que es la transformada directa de Laplace

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n D_n \exp \left(-\frac{2j\pi mn}{N} \right), \quad (\text{B.15})$$

donde

$$D_n = \Delta t \exp \left(-c_w n\Delta t - \frac{j\pi n}{N} \right) \quad (\text{B.16})$$

B.5 Errores en la transformada numérica de Laplace inversa.

La evaluación numérica de la transformada numérica de Laplace inversa introduce dos tipos de errores: por truncamiento y por discretización [72].

El error por truncamiento de la frecuencia de integración produce oscilaciones llamadas fenómeno de Gibbs, que pueden ser reducidas con el uso de una función ventana $\sigma(\omega)$, de las más utilizadas para fenómenos transitorios son la de Lanczos, Hamming y Hanning. En este trabajo se emplea la ventana de Hanning,

$$\sigma(\omega) = \frac{1 + \cos(\pi\omega/\Omega)}{2} \quad (\text{B.17})$$

donde Ω es la frecuencia máxima de estudio

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

Mientras que el error por aliasing debido a la discretización de la variable continua ω , se reduce suavizando la respuesta del sistema seleccionando un adecuado coeficiente de amortiguamiento c . En este trabajo se empleó la definición empírica propuesta por Wilcox [36]:

$$c_w = 2\Delta\omega \quad (\text{B.18})$$

Otra propuesta para evaluar el coeficiente de amortiguamiento es la propuesta por Wedepohl [73], la cual es la siguiente:

$$c_w = \frac{\ln(N^2)}{T} \quad (\text{B.19})$$

Apéndice C. Método del Elemento Finito.

C.1 Introducción.

El método del elemento finito (MEF) tiene su origen en el campo del análisis estructural. Aunque las primeras aplicaciones matemáticas del método fueron hechas por Courant [74] en 1943, no fue aplicado a problemas de electromagnetismo hasta 1968. Desde entonces se ha empleado en diversas áreas, tales como propagación de ondas, máquinas eléctricas, dispositivos semiconductores y absorción de radiación electromagnética en biología.

Aunque otros métodos como el método de las diferencias finitas (FDM) y el método de los momentos (MOM) son más simples y fáciles de implementar en programas computacionales en comparación al MEF, este último es más poderoso y versátil numéricamente para modelar problemas que involucran dominios irregulares, condiciones de frontera y no linealidades.

El Método del Elemento Finito (MEF) en la resolución de un problema implica básicamente cuatro pasos [75]:

- A. Discretización de la región de solución en un número finito de elementos.
- B. Deducción de las ecuaciones que rigen a un elemento.
- C. Ensamblaje de todos los elementos en la región de solución.
- D. Solución del sistema de ecuaciones obtenido.

A continuación se describen a detalle cada uno de los pasos para el caso de la solución de la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$.

C.1.1 Discretización de la región de solución en un número finito de elementos.

La región de solución se divide en un número de *elementos finitos* para el mallado en dos dimensiones. Comúnmente se emplean elementos triangulares porque ofrecen ventajas para el mallado de geometrías complejas. Los puntos de intersección de cada uno de los triángulos son conocidos como nodos. Se busca entonces una aproximación del potencial V_e en cada elemento e y después se interrelacionan las distribuciones de potencial de cada uno de los elementos de tal forma que el potencial sea continuo para todos los lados de las fronteras entre los elementos. La solución aproximada de la región entera es:

$$V(x, y) \approx \sum_{e=1}^N V_e(x, y) \quad (\text{C.1})$$

donde N es el número de elementos triangulares en los que se ha dividido la región de solución.

C.1.2. Deducción de las ecuaciones que rigen a un elemento.

La forma más común de aproximación de V_e dentro de un elemento es la aproximación polinomial;

$$V_e(x, y) = a + bx + cy \quad (C.2)$$

En el caso de un elemento triangular (ver Fig. 1). El potencial V_e es en general no cero dentro del elemento e , pero de cero fuera de e . Se asume que la variación lineal del potencial dentro del elemento triangular (C.2), equivale a suponer que el campo eléctrico es uniforme dentro del elemento; es decir:

$$\mathbf{E}_e = -\nabla V_e = -(b\mathbf{a}_x + c\mathbf{a}_y) \quad (C.3)$$

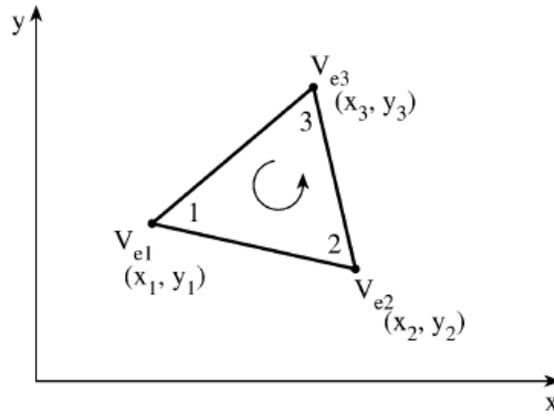


Fig. C.1. Elemento típico triangular, la numeración local de los nodos 1-2-3 en sentido inverso al giro de las manecillas del reloj, ilustración tomada de [76].

Considerando un elemento triangular (ver Fig. C.1). El potencial V_{e1} , V_{e2} y V_{e3} en los nodos 1, 2 y 3, respectivamente, se obtienen mediante la ecuación (C.2); en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

Los coeficientes a , b y c se determinan a partir de (C.4) como:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

Sustituyendo (C.5) en (C.2), resulta en

$$V_e = [1 \quad x \quad y] \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & (x_3y_1 - x_1y_3) & (x_1y_2 - x_2y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix}$$

o

$$V_e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) V_{ei} \quad (\text{C.6})$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (\text{C.7a})$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (\text{C.7b})$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (\text{C.7c})$$

y A es el área del elemento e ; esto es,

$$\begin{aligned} 2A &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_2y_3 - x_3y_2) \end{aligned}$$

o

$$A = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \quad (\text{C.8})$$

El valor de A es positivo si los nodos se enumeran en dirección opuesta a las manecillas del reloj (comenzando por cualquiera de ellos) ver Fig. C.1. Cabe hacer notar que de la ecuación (C.6) da el potencial en cualquier punto (x, y) dentro del elemento siempre que se conozca el potencial en los vértices.

También se debe notar que α_i son funciones de interpolación lineal. Se les llama *funciones de forma del elemento* y poseen las siguientes propiedades [77]:

$$\alpha_i(x_i, y_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (\text{C.9a})$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) = 1 \quad (\text{C.9b})$$

En la Fig. C.2 se ilustran estas funciones de forma α_1 , α_2 y α_3 .

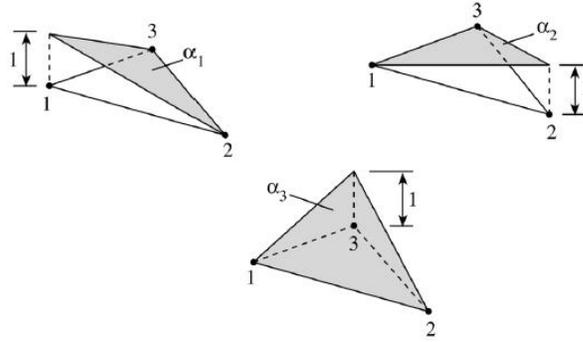


Fig. C.2. Funciones de forma α_1 , α_2 y α_3 para elementos triangulares, ilustraciones tomadas de [76].

Para el caso electrostático, la energía por unidad de longitud asociada con el elemento e está dada por la ecuación de Laplace (2.67); es decir,

$$W_e = \frac{1}{2} \int \epsilon |\mathbf{E}|^2 dS = \frac{1}{2} \int \epsilon |\nabla V_e|^2 dS \quad (\text{C.10})$$

donde se ha supuesto una región de solución bidimensional sin carga ($\rho_s = 0$), la funcional de energía depende del tipo de problema electromagnético. De acuerdo con la ecuación (C.6), sin embargo,

$$\nabla V_e = \sum_{i=1}^3 V_{ei} \nabla \alpha_i \quad (\text{C.11})$$

Sustituyendo (C.11) en (C.10), da como resultado:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon V_{ei} \left[\int \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j dS \right] V_{ej} \quad (\text{C.12})$$

Si el término entre corchetes se define como

$$C_{ij}^{(e)} = \int \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j dS \quad (\text{C.13})$$

La ecuación (C.12) puede expresarse en forma matricial como:

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon [V_e]^T [C^{(e)}] [V_e] \quad (\text{C.14})$$

donde T indica la transposición de la matriz,

$$[V_e] = \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} \quad (\text{C.15a})$$

y

$$[C^{(e)}] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(e)} & C_{12}^{(e)} & C_{13}^{(e)} \\ C_{21}^{(e)} & C_{22}^{(e)} & C_{23}^{(e)} \\ C_{31}^{(e)} & C_{32}^{(e)} & C_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (C.15b)$$

La matriz $[C^{(e)}]$ es la *matriz de coeficientes de los elementos*. El elemento matricial $C_{ij}^{(e)}$ de la matriz de coeficientes puede considerarse como el acoplador entre nodos i y j ; su valor se obtiene de las ecuaciones (C.7) Y (C.13). Por ejemplo,

$$\begin{aligned} C_{12}^{(e)} &= \int \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j \, dS \\ &= \frac{1}{4A^2} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \int dS \\ &= \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \end{aligned} \quad (C.16a)$$

Análogamente para los demás coeficientes:

$$C_{11}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2] \quad (C.16b)$$

$$C_{13}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)] \quad (C.16c)$$

$$C_{22}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2] \quad (C.16d)$$

$$C_{23}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)] \quad (C.16e)$$

$$C_{33}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2] \quad (C.16f)$$

Además:

$$C_{21}^{(e)} = C_{12}^{(e)} \quad C_{31}^{(e)} = C_{13}^{(e)} \quad C_{32}^{(e)} = C_{23}^{(e)} \quad (C.16g)$$

C.1.3 Ensamblaje de todos los elementos en la región de solución.

Habiendo considerado un elemento típico, el siguiente paso es ensamblar todos los elementos en la región de solución. La energía asociada con el ensamblaje de elementos es

$$W = \sum_{e=1}^N W_e = \frac{1}{2} \varepsilon [V]^T [C] [V] \quad (C.17)$$

donde

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

y n es el número de nodos, N el número de elementos y $[C]$ la *matriz de coeficientes global o general*, la cual está formada por el ensamble de todas las matrices de coeficientes de los elementos particulares.

Para comprender el proceso de agrupación de las matrices de coeficientes de los elementos particulares en la matriz de coeficientes global, considere la malla de elementos finitos integrada por tres elementos finitos (ver Fig. C.3).

Observe la numeración en los nodos, por un lado, la numeración 1, 2, 3, 4 y 5 es la numeración *global*, mientras que la numeración $i-j-k$ es la numeración *local*, correspondiente a la numeración 1-2-3 del elemento en la Fig. C.3. Con referencia al elemento 3 (ver. Fig. C.3), la numeración global 3-5-4 corresponde a la numeración local 1-2-3 del elemento de la misma figura, teniendo en cuenta que ésta debe seguir una secuencia de dirección contraria a la de las manecillas del reloj a partir de cualquier nodo del elemento.

Así, la numeración de la figura C.3 no es única, y cualquier numeración que se emplee derivará en la misma $[C]$. Si se adopta la numeración de la Fig. C.3, es de suponer que la matriz de coeficientes global será de la forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{C.19})$$

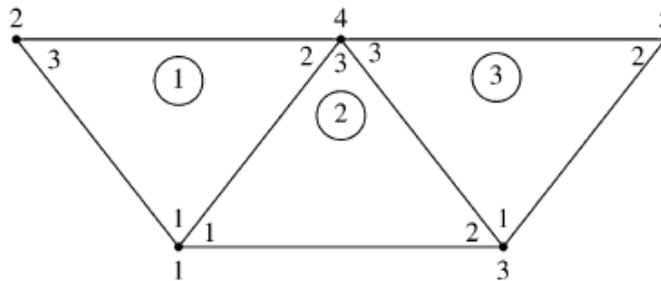


Fig. C.3. Ensamble de tres elementos; $i j k$ correspondientes a la numeración local (1-2-3) del elemento mostrado, ilustración tomada de [76].

Matriz de 5×5 puesto que están implicados los cinco nodos ($n = 5$). C_{ij} es el acoplador entre los nodos i y j y se obtiene con base en que la distribución de potencial debe ser continua a uno y otro lado de la frontera entre los elementos. La contribución a la posición i, j en $[C]$ procede de todos los elementos que contienen nodos i y j . Para hallar C_{11} , por

ejemplo se observa en la Fig. C.3 que el nodo global 1 pertenece a los elementos 1 y 2 y es el nodo local 1 en ambos, por tanto,

$$C_{11} = C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)} \quad (\text{C.20a})$$

En cuanto a C_{22} , el nodo global 2 sólo pertenece al elemento 1 y es igual al nodo local 3; por tanto,

$$C_{22} = C_{33}^{(1)} \quad (\text{C.20b})$$

En cuanto a C_{44} , el nodo global 4 equivale a los nodos locales 2, 3 y 3 de los elementos 1, 2 y 3, respectivamente; así

$$C_{44} = C_{22}^{(1)} + C_{22}^{(2)} + C_{33}^{(3)} \quad (\text{C.20c})$$

En cuanto a C_{14} , el nodo global 14 equivale a los vínculos locales 12 y 13 de los elementos 1 y 2, respectivamente; en consecuencia,

$$C_{14} = C_{41} = C_{12}^{(1)} + C_{13}^{(2)} \quad (\text{C.20d})$$

Puesto que no hay acoplamiento (enlace directo) entre los nodos 2 y 3,

$$C_{23} = C_{32} = 0 \quad (\text{C.20e})$$

Siguiendo este procedimiento mediante la inspección de la Fig. C.3, se obtienen todos los términos de la matriz de coeficientes global, en esta forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)} & C_{13}^{(1)} & C_{12}^{(2)} & C_{12}^{(1)} + C_{13}^{(2)} & 0 \\ C_{31}^{(1)} & C_{33}^{(2)} & 0 & C_{32}^{(1)} & 0 \\ C_{21}^{(2)} & 0 & C_{22}^{(2)} + C_{11}^{(3)} & C_{23}^{(2)} + C_{13}^{(3)} & C_{12}^{(3)} \\ C_{21}^{(1)} + C_{31}^{(2)} & C_{23}^{(1)} & C_{32}^{(2)} + C_{31}^{(3)} & C_{22}^{(1)} + C_{33}^{(2)} + C_{33}^{(3)} & C_{32}^{(3)} \\ 0 & 0 & C_{21}^{(3)} & C_{23}^{(3)} & C_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (\text{C.21})$$

Note que las matrices de coeficientes de elemento se empalman en los nodos compartidos por los elementos y que la matriz de coeficiente global $[C]$ contiene 27 términos (nueve por cada elemento). Vale destacar asimismo las siguientes propiedades de la matriz $[C]$;

1. Es simétrica ($C_{ij} = C_{ji}$), al igual que la matriz de coeficientes de elementos.
2. $C_{ij} = 0$, cuando no existe un acoplamiento entre los elementos (nodos) i y j . Por lo tanto, $[C]$ se vuelve una matriz dispersa.
3. Es singular.

C.1.4 Resolución del sistema de ecuaciones obtenido.

Por el cálculo de variaciones se sabe que la ecuación de Laplace (Poisson) se satisface cuando la energía total en la región de solución es mínima. Para ello es necesario que las derivadas parciales de la energía W respecto de cada valor nodal de potencial sean cero, es decir:

$$\frac{\partial W}{\partial V_1} = \frac{\partial W}{\partial V_2} = \dots = \frac{\partial W}{\partial V_n} = 0$$

o:

$$\frac{\partial W}{\partial V_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (C.22)$$

Por ejemplo, para obtener $\frac{\partial W}{\partial V_1} = 0$ en la malla de elementos finitos de la Fig. C.3, por ejemplo, la ecuación (C.19) se sustituye en la ecuación (C.17) y tomando la derivada parcial de W respecto de V_1 .

$$0 = \frac{\partial W}{\partial V_1} = 2V_1C_{11} + V_2C_{12} + V_3C_{13} + V_4C_{14} + V_5C_{15} + V_2C_{21} + V_3C_{31} + V_4C_{41} + V_5C_{51}$$

o

$$0 = V_1C_{11} + V_2C_{12} + V_3C_{13} + V_4C_{14} + V_5C_{15} \quad (C.23)$$

En general, $\frac{\partial W}{\partial V_1} = 0$ conduce a

$$0 = \sum_{i=1}^n V_i C_{ik} \quad (C.24)$$

donde n es el número de nodos en la malla. Al expresar la ecuación (C.24) para todos los nodos $k = 1, 2, \dots, n$, se obtiene un conjunto de ecuaciones simultáneas a partir de las cuales es posible hallar la solución de $[V]^T = [V_1, V_2, \dots, V_n]$. Esto puede ser por cualquiera de los siguientes métodos.

Método de iteración

Suponiendo que el nodo 1 de la Figura C.3 es un nodo libre. El potencial en ese nodo puede obtenerse de la ecuación (C.23) como:

$$V_1 = -\frac{1}{C_{11}} \sum_{i=2}^5 V_i C_{1i} \quad (C.25)$$

En general, el potencial en un nodo libre k se obtiene de la ecuación (C.24) como

$$V_k = -\frac{1}{C_{kk}} \sum_{i=1, i \neq k}^n V_i C_{ki} \quad (C.26)$$

Esto se aplica iterativamente a todos los nodos libres de la malla de n nodos. Puesto que $C_{ki} = 0$ si el nodo k no está directamente conectado con el nodo i , solo los nodos directamente vinculados con el nodo k contribuyen a V_k de la ecuación (C.26)

Así, si se conoce el potencial en los nodos vinculados con el nodo k , es posible determinar V_k mediante la ecuación (C.26). El proceso de iteración comienza asignando al potencial en los nodos libres un valor de cero o el valor del potencial promedio

$$V_{ave} = \frac{1}{2}(V_{min} + V_{max}) \quad (C.27)$$

donde V_{min} y V_{max} son los valores mínimo y máximo del potencial prescrito en los nodos fijos. El potencial en los nodos libres se calcula mediante la ecuación (C.26) a partir de tales valores iniciales. Habiendo calculado el nuevo valor de todos los nodos libres fijos de la primera iteración, el valor se convierte en el valor inicial de la segunda iteración. El procedimiento se repite hasta que el cambio entre iteraciones subsecuentes se vuelve insignificante.

Método de la matriz banda

Si se enumeran primero todos los nodos libres y después los nodos fijos, la ecuación (C.17) puede expresarse como [77]:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon [V_f \quad V_p] \begin{bmatrix} C_{ff} & C_{fp} \\ C_{pf} & C_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_f \\ V_p \end{bmatrix} \quad (C.28)$$

Donde los subíndices f y p se refieren a nodos con potencial libre y fijo (o prescrito), respectivamente. Puesto que V_p es constante (consta de valores fijos conocidos), sólo se diferencia respecto de V_f de modo que la aplicación de la ecuación (C.22) a la ecuación (C.28) produce

$$C_{ff}V_p + C_{fp}V_p = 0$$

o

$$[C_{ff}][V_f] = -[C_{fp}][V_p] \quad (C.29)$$

Esta ecuación puede expresarse como

$$[A][V] = [B] \quad (C.30a)$$

o

$$[V] = [A]^{-1}[B] \quad (C.30b)$$

Donde $[V] = [V_f]$, $[A] = [C_{ff}]$ y $[B] = -[C_{fp}][V_p]$. Puesto que, en general, $[A]$ no es singular, el potencial en los nodos libres puede hallarse mediante la ecuación (C.30). $[V]$

Cálculo de parámetros mediante el Método del Elemento Finito para el análisis de transitorios electromagnéticos en cables de alta tensión.

puede despejarse en la ecuación (C.30a) con la técnica de eliminación Gaussiana o en la ecuación (C.30b) mediante la inversión matricial si el tamaño de la matriz a ser invertida no es muy grande.

Apéndice D. Publicaciones.

- G.I. Cruz, C.H. Sanchez, P. Gómez; F.P. Espino-Cortes. “Efecto de la corriente de retorno por tierra en el cálculo de la impedancia serie de líneas de transmisión”. 27° Reunión Internacional de Verano de Potencia, Acapulco, Guerrero, México, 20-26 Julio 2014.
- G.I. Cruz, C.H. Sanchez, P. Gómez; F.P. Espino-Cortes. “Computation of underground cables series impedance using the finite element method”. 34th Convención de Centroamérica y Panamá (CONCAPAN XXXIV), Ciudad de Panamá, Panamá, 12-14 Noviembre 2014.